

論文の内容の要旨

論文題目 Unified Method for Analyzing Complexity of Finding Another Solution (別解問題の計算量解析の統一的手法)

氏名 八登 崇之

今日、様々なゲーム・パズルが世界中で遊ばれている。特に、近年における「数独」等の「ペンシルパズル」の流行を受けて、パズルの問題をいかにして作るかということが重要な課題になってきている。本論文では、「別解問題」(Another Solution Problem; 略称 ASP) について研究する。ASP とは、問題のインスタンスとそれに対する解が与えられた時に与えられたもの以外の解を求める問題のことであり、パズル問題の作成の作業と深い関わりがある。

ASP の計算量解析への系統的なアプローチは、FNP (NP の関数版) においては、1996 年の上田・永尾の論文に始まる。そこでは、parsimonious 還元で解の間の変換が効率的に行えるものが ASP の計算量の解析に有用であることが指摘された。

本研究では彼等の考えを拡張して、ASP の計算量を系統的に調べるための枠組を構築する。ASP では解が本質的な関わりをもつので、この枠組は (多価) 関数計算量の理論に基づくことになる。我々が提案する枠組における主要な道具となるものは、上田・永尾が用いた還元をより強くした還元である関数 parsimonious 還元と、関数計算量クラスの中でのその還元に関する完全性として定義される ASP 完全性である。ある問題が ASP 完全であることから ASP が (判定問題あるいは関数問題として) 難しいことが導出される。これによって、実際に ASP そのものについて調べることなく ASP の困難性の結果を得ることができるようになる。パズル問題作成のような実用的な関心と関わりのある ASP の理論において関数計算量が重要な役割を果たすことは、関数計算量の研究が主に理論的興味から行われてきたことを考えると興味深い。

そして、その枠組みを様々なゲーム・パズルに適用することを考える。ゲーム・パズルは判定問題としては NP、PSPACE、EXP (指数時間) のクラスに属している。クラス NP においては数独などの幾つかのペンシルパズルが ASP 完全であることを示す。

ASP の理論そのものは特定の計算量クラスに依存しないようにできているが、その理論を NP より高いクラスに適用しようとする、幾つかの問題が生じる。最大の問題は、高い言語クラスに対応する適切な関数クラスの定義がないことである。

クラス PSPACE に対する最初の試みとして、パズルゲームの一種の「倉庫番」を取り上げる。これは、長い手数 of 1 人ゲームの例になっている。我々は、新しい種類の非決定性変換機である OB 変換機を提案し、それを用いてクラス $FNPSPACE_{p-out}$ を定義する。このクラスは倉庫番の解の性質と適合するように作られていて、それ故、倉庫番がこのクラスで ASP 完全となることが期待される。我々は、倉庫番を 3 次元に拡張したゲームが実際に $FNPSPACE_{p-out}$ で ASP 完全となることを証明する。さらに、短い手数の 2 人ゲームの例となる人工的ゲームである QBF ゲームについても $FNPSPACE_{p-out}$ で ASP 完全であることを証明する。

クラス EXP は長い手数の 2 人ゲームに対応する。このクラスでは我々は一般化詰将棋の余詰問題を対象にする。余詰問題はパズルとして確固とした解の定義をもっていて、この定義においては解を多項式時間で検証することができない。我々は、このことが ASP の理論を適用するとき大きな問題となることを議論し、その上で、この問題を解決するために、ASP の理論をプロミス問題を扱えるように拡張する。そして、拡張された理論を用いて、余詰問題が指数時間困難であることを証明する。最後に、長い手数の 2 人ゲームに対応する関数問題クラスを定義する方法について議論する。

本研究において得られた困難性の結果は、これらのゲームやパズルの問題を作成することが問題を解くことと同様に難しいことを示唆している。