論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目　Strong consistency of maximum likelihood type estimators for finite mixture models
(有限混合分布モデルに対する最尤型推定量の強一致性)

氏　　名　田 中 研 太 郎

混合分布モデルとは, いくつかの確率分布を重みを付けて足し合わせて得られる確率分布モデルのことであり, 画像認識・音声認識・遺伝情報解析および神経回路網といった情報科学のさまざまな分野に応用されている. これらの分野においては, 正規分布を混合した混合正規分布モデルがよく使われている. しかし, 混合正規分布モデルを含む混合位置尺度分布モデルにおいては, 尤度関数の非有界性により最尤推定が不可能であるという問題点があることが知られている. 例えば, 混合正規分布モデルにおいて, ある一つの成分の正規分布の平均を, 与えられたデータのどれかの値に等しくなるように設定し, その成分の分散を0に近づけていくと, データのある点における密度関数の高さが無限大に大きくなってしまい, 尤度が発散してしまう. よって, 尤度関数が非有界であるので, 尤度関数を最大化して得られる最尤推定量は存在しないということになる. この問題点を回避するために, 本論文では, 尺度母数に対する制約付き最尤推定量と罰則付き最尤推定量を考えた. また, それらの最尤型の推定量が, いくつかの正則条件の下で強一致性という好ましい性質を持つことを示した. ここで, 強一致性とは, ある未知パラメータに対する推定量が, 与えられるデータの数が無限大に増えていったときに, 真のパラメータに確率1で収束するという性質のことを指している.

いま, M 成分混合位置尺度分布を

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m f_m(x;\mu_m,\sigma_m)$$

で表すことにする. ここで α_m は重みであり, f_m はある位置尺度分布の密度関数とする. $\mu_m \in \mathbb{R}$ は位置母数を表し, $\sigma_m > 0$ は尺度母数を表す. これらのパラメータをまとめて $\boldsymbol{\theta}$ で表すことにする.

まず, 制約付き最尤推定量であるが, これは, 尺度母数 σ_m の値に対して, サンプルサイズ n の増加とともに小さくなっていく $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ という数列を用いて

$$\min_m \sigma_m \geq c_n$$

という制約を付けたパラメータ空間における最尤推定量として与える. このように尺度母数の値を下から抑えれば, 尤度は有界になり, 最尤推定量が存在する. このとき, ある $0 < d < 1$ に対して $c_n = e^{-n^d}$ と置くと, その $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ による制約付き最尤推定量が混合位置尺度分布モデルにおいて強一致性を持つことを証明した. 次に, 違う形の制約付き最尤推定量として, 尺度母数の比の最小値に制約を置いた場合も考えた.

$$\min_{m \neq m'} \frac{\sigma_m}{\sigma'_m} \geq b_n$$

このような制約を付けたパラメータ空間における最尤推定量についても, ある $0 < d < 1$ に対して $b_n = e^{-n^d}$ と置くと, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ による制約付き最尤推定量が混合位置尺度分布モデルにおいて強一致性を持つことを証明した. この設定における制約付き最尤推定量の強一致性は, Hathaway(1985) において未解決問題として取り上げられていたが, 本論文の結果により, 肯定的に解決されたことになる.

また, 尤度の非有界性の問題は, 有界になるように尤度に罰則項を付けた罰則付き尤度を使うことでも避けることができる. 尺度母数に対する罰則を構成するために, 以下の式を満たす有界な非負関数 $\bar{s}_n(y)$ を考える.

$$\exists \bar{s} > 0, 0 < \exists d < 1, \text{ s.t. } 0 < \sup_{y>0} \frac{\bar{s}_n(y)}{y^M} \leq \bar{s} \cdot \exp(n^d).$$

この $\bar{s}_n(y)$ によって罰則を $s_n(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{m=1}^{M} \bar{s}_n(\sigma_m)$ の逆数として定義する. そして, 罰則付き尤度関数を $h_n(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x}) = l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x}) \cdot s_n(\boldsymbol{\theta})$ と定義する. ここで $l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x})$ は尤度を表す. また, 罰則付き最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{h_n} = \mathrm{argsup}_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\, h_n(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{x})$ と定義する. このとき, いくつかの正則条件の下で, 罰則付き最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{h_n}$ が混合位置尺度分布モデルにおいて強一致性を持つことを証明した. さらに, 尺度母数の比の最小値に罰則を入れた場合における最尤推定についても考えた. 以下の式を満たす有界な非負関数 $\bar{r}_n(y)$ を考える.

$$\exists \bar{r},\ \exists \delta > 0,\ 0 \leq \exists d < 1 \text{ s.t. } \ \bar{r}_n(y) \leq \min\{\bar{R}\ ,\ \bar{r} \cdot y^{M+\delta} \cdot \exp(n^d)\}$$

この $\bar{r}_n(y)$ によって罰則を $r_n(\boldsymbol{\theta}) = \bar{r}_n(\frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(M)}})$ の逆数として定める．そして，罰則付き尤度関数と罰則付き最尤推定量を $g_n(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = l(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) \cdot r_n(\boldsymbol{\theta})$ と $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{g_n} = \mathrm{argsup}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}\, g_n(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ で定義する．このとき，いくつかの正則条件の下で，罰則付最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{g_n}$ が混合位置尺度分布モデルにおいて強一致性を持つことを証明した．

以上は全て理論的な話であるが，混合位置尺度分布モデルにおいては，EM アルゴリズムなどの最尤推定に基づいたパラメータ推定アルゴリズムは，尤度の非有界性により，そのままの形では破綻してしまうことが多い．本論文では，混合正規分布モデルにおいて通常の EM アルゴリズムを用いると，尤度の非有界性により，分散が 0 に近づいてしまう場合があることを数値実験で示した．また，この問題点は，制約や罰則を適切に組み入れた EM アルゴリズムを使うことによって改善できる事を数値実験で示した．さらにクロスバリデーションにより，適切な制約や罰則が選択できることも数値実験で示した．