論文の内容の要旨

論文題目：Five dimensional K-contact manifolds of rank 2
（和訳：階数 2 の 5 次元 K 接触多様体について）

氏名：野澤 啓

本論文の主題は 5 次元 K 接触多様体の幾何である。K 接触多様体とは、接触形式 α を持つ奇数次元多様体 M であってその Reeb flow が M 上のある Riemann 計量を保つものである。ここで、α の Reeb flow とは、α の Reeb vector 場によって生成される flow のことである。K 接触多様体の主な例は佐々木多様体の下部の接触形式を持つ多様体である。より具体的には、重み付き斉次多項式の孤立特異点のリンクとトーリック接触多様体が挙げられる。以下、本研究の背景、K 接触多様体の階数の説明、本論文の主結果、証明方法の概要について順に述べる。

背景 近年、佐々木多様体は数理物理と Einstein 幾何において研究されてきたが、その分類については 3 次元の場合、5 次元かつ単連結な場合、トーリックな場合などを除き多くのことは知られていない。また、後述するように、5 次元 K 接触多様体の中では階数 2 のもののみ他の幾何的対象との対応が知られていなかった。本論文では階数 2 の 5 次元 K 接触多様体について接触形式から定まる T^2 作用に付随する接触運動量写像に Morse 理論を適用し、分類及び構造定理を得た。

運動量写像に対する Morse 理論はトーリック幾何の基本的手法であり、Audin [2], 阿原-服部 [1], Karshon [4] により hamilton な S^1 作用を持つ 4 次元 symplectic 多様体の研究の中で有効に用いられた。階数 2 の 5 次元 K 接触多様体は hamilton な S^1 作用を持つ 4 次元 symplectic orbifold 上の S^1 orbibundle の全空間と考えることができ、hamilton な S^1 作用を持つ 4 次元 symplectic 多様体の分類は階数 2 の 5 次元 K 接触多様体の分類と関わる。本論文の主結果は Karshon [4] の結果と関係している。

閉 K 接触多様体 (M,α) の階数 α の Reeb flow が保つ M 上の Riemann 計量 g をとると、Reeb flow は Riemann 多様体 (M,g) の計量同型群 $\mathrm{Isom}(M,g)$ の 1 次元部分群とみなせ、Lie 群 $\mathrm{Isom}(M,g)$ のコンパクト性によりその閉包はある次元のトーラス G となる。G の次元は計量 g に依らず、(M,α) の階数と呼ばれる。M 上の G 作用は α を保つので、階数 n の K 接触多様体は α を保存する T^n 作用を持つ。このことから、$(2n-1)$ 次元閉 K 接触多様体の階数は n 以下であることが容易に分かる。

階数 1 の K 接触多様体 (M,α) の Reeb flow の軌道は全て閉であり、Reeb flow による商を取ることで、M は symplectic orbifold 上の S^1 orbibundle の全空間であることが分かる。また、階数 n の $(2n-1)$ 次元閉 K 接触多様体の下部の T^n 作用付き接触多様体はトーリック幾何の手法により $\mathbb{R}^n$ 内の錐によって分類される [6]。 よって、5 次元の場合は、階数が 2 以外の場合には他の幾何的対象との対応が知られていた。階数 2 の場合には、本論文において初めてある種のグラフとの対応が構成された。

主結果 一つ目の定理は階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体の組み合わせ的な分類を与える。階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) に対して、Reeb flow の閉包を G で表す。(M,α) に対して、M 上の G 作用に付随する接触運動量写像 Φ_α という M から 1 次元アファイン空間への写像が定義される。ψ を G と T^2 の同型とする。(M,α,ψ) の graph of isotropy data を、Φ_α の Morse 理論的な data と G 作用の isotropy 群の data を持つ graph として定義する。(M,α,ψ) の graph of isotropy data の同型類は ψ の取り方に依らず、(M,α) の graph of isotropy data の同型類が定義される。

定理 1. 階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) の同型類は (M,α) の *graph of isotropy data* の同型類によって決定される。

$i=0,1$ に対して、(M_i,α_i) を階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体とし、その Reeb vector 場を R_i で表す。(M_i,α_i) の graph of isotropy data の同型類は R_i によって決まるので、定理 1 は次の系を持つ。

系 1. (M_0,α_0) と (M_1,α_1) が同型であることと、微分同相 $f\colon M_0 \longrightarrow M_1$ であって、$f_*R_0=R_1$ を満たすものが存在することは同値である。

二つ目の定理は階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体の手術による分類に関わる。5 次元 K 接触多様体に対して、接触爆発という手術を Lerman による接触切断 [5] の特別な場合として定義する。接触爆発は位相的には K 接触多様体からレンズ空間又は Reeb flow の閉軌道の管状近傍を切り取り、別のレンズ空間上の複素直線束の零切断の近傍を貼り戻す操作である。接触爆縮は接触爆発の逆操作として定義する。階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) の接触運動量写像の極値集合は常に二つの連結成分 $B_{\max}$ と $B_{\min}$ を持つが、それらはそれぞれ Reeb flow の孤立閉軌道、又は Reeb flow の閉軌道の和であるような 3 次元部分多様体のどちらかであることに注意する。以下の定理を得た。

定理 2. *(i)* $(\dim B_{\max}, \dim B_{\min})=(3,3)$ のとき、(M,α) は閉曲面上のあるレンズ空間束の全空間に有限回の接触爆発を施して得られる。

(ii) $(\dim B_{\max}, \dim B_{\min})=(3,1)$ 又は $(1,3)$ のとき、(M,α) は S^2 上のあるレンズ空間束の全空間に有限回の接触爆発を施した後に接触爆縮を 1 回施して得られる。

(iii) $(\dim B_{\max}, \dim B_{\min})=(1,1)$ のとき、(M,α) は S^2 上のあるレンズ空間束の全空間に有限回の接触爆発を施した後に接触爆縮を 2 回施して得られる。

三つ目の定理は階数 2 の 5 次元 K 接触多様体がトーリック接触多様体となるための十分条件を与えるも

のである。$B_{\max}$ と $B_{\min}$ を階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) の接触運動量写像の極値集合の二つの連結成分 とする。G を α の Reeb flow の閉包とし、その M 上の作用の $B_{\max}$ と $B_{\min}$ における isotropy 群の単位連結成分をそれぞれ $G_{\max}$ と $G_{\min}$ で表す。

定理 3. 階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) が以下の二つの条件を満たすとする。

(i) α の *Reeb flow* の閉軌道が全て孤立している。

(ii) G の S^1 部分群 G' であって、$G' \times G_{\max}$ 及び $G' \times G_{\min}$ が包含写像の直積によって G に同型であり、M 上の G' 作用の軌道が $\ker\alpha$ に横断的なものが存在する。

このとき、M 上の T^3 作用であって α を保つものが存在する。

仮定 (ii) は接触運動量写像の像に関する条件に言い換えることができる。四つ目の定理は以下である。

定理 4. 階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) に対して、M 上の *Riemann* 計量 g で (M,α,g) が佐々木多様体となるものが存在する。

主結果の証明方法 定理 1 について述べる。階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) の接触運動量写像と Reeb vector 場が付随するグラフから復元できること、及び 5 次元閉多様体上の 2 つの階数 2 の K 接触構造が接触運動量写像と Reeb vector 場を共有しているとき互いに同型になることが Morse 理論に関する議論によって示されるので、定理 1 が従う。

定理 2 について述べる。(M,α) の接触運動量写像が 1 次元の極値集合を持つとき、極値集合に沿った接触爆発を 1 回施して極値集合を 3 次元のものに取り替えられるので、(ii) と (iii) は (i) に帰着する。(i) の仮定の下では、有限個の接触運動量写像の gradient 多様体の閉包の補集合は運動量写像の gradient 多様体の閉包を fiber とするような穴あき曲面上のレンズ空間束の全空間となる。ここで、接触運動量写像の gradient 多様体とは Reeb flow の閉包で得られる G 作用と接触運動量写像の gradient flow の積で定義される $(T^2 \times \mathbb{R})$ 作用の軌道のことである。除いた有限個の gradient 多様体の和の連結成分を $C^1, C^2, \cdots, C^n$ とする。各 C^j の開近傍 U^j 上に α を保つ T^3 作用が存在するので、U^j はトーリック接触多様体に埋め込まれる。Dirichlet の算術級数定理を用いた $\mathbb{R}^3$ 内の錘に関する初等整数論的な議論により、C^j を接触爆縮の有限列によって消せることが示され、定理 2 (i) が証明される。

定理 3 について述べる。仮定 (i), (ii) の下では、接触運動量写像の極値集合の二つの連結成分が高々 2 つの gradient 多様体の非自明な鎖で結ばれることが、接触運動量写像のレベルセットの G' 作用による商の上に G 作用から導かれる S^1 作用の Euler 数の計算により分かる。また、一般に階数 2 の 5 次元閉 K 接触多様体 (M,α) の極値集合の二つの連結成分がそれぞれレンズ空間又は Reeb vector 場の孤立閉軌道であり、それらが高々 2 つの gradient 多様体の非自明な列で結ばれるとき、M 上の T^3 作用で α を保つものを構成できるので、定理 3 が従う。後半はトーリック幾何の手法を用いる。

定理 4 について述べる。複素曲面に対する Enriques-Castelnuovo の定理の類似の議論により、(M,α) が α と共に佐々木計量を定義する Riemann 計量を持つとき、(M,α) を K 接触部分多様体であるレンズ空間に沿って接触爆縮して得られる K 接触多様体 $(\overline{M},\overline{\alpha})$ も $\overline{\alpha}$ と共に佐々木計量を定義する Riemann 計量を持つことが分かる。この議論により、定理 4 の証明は接触運動量写像の極値集合の連結成分が共に 3 次元の場合に帰着する。このとき、定理 2 の証明方法において述べたように、有限個の gradient 多様体の閉包の補集合は穴開き曲面上のレンズ空間束の全空間となる。除いた有限個の gradient 多様体の和の連結成分を C^1, C^2, $\cdots$, C^n とすると、C^j の開近傍 U^j をトーリック接触多様体に埋め込むことができる。トーリック接触多様

体は Boyer-Galicki の定理 [3] により適合する佐々木計量を持つので、 U^j 上では α と共に佐々木計量を定義する Riemann 計量が存在する。この Riemann 計量をレンズ空間束の構造を用いて M 全体に延ばすことができ、定理 4 が示される。

参考文献

[1] K. Ahara; A. Hattori, *4-dimensional symplectic S^1-manifolds admitting moment map*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 38 (1991), 251–298.

[2] M. Audin, *Hamiltonian periodiques sur les varietes symplectiques compactes de dimension* 4, Géométrie symplectique et méchanique, Lec. Notes in Math., 1416 (1990).

[3] C. P. Boyer; K. Galicki, *A note on toric contact geometry*, J. Geom. Phys. 35, no. 4, (2000), 288–298.

[4] Y. Karshon, *Periodic Hamiltonian flows on four dimensional manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 672, (1999).

[5] E. Lerman, *Contact Cuts*, Israel J. Math, 124 (2001), 77–92.

[6] E. Lerman, *Contact Toric Manifolds*, J. Symplectic Geom. 1, no. 4 (2002), 785–828.