

論文審査の結果の要旨

氏名 米澤信拓

量子力学ではデルタ関数など、しばしば特異性のあるポテンシャルを持つ系が考察され、そのエネルギースペクトルから諸種の物理的性質が導かれる。通常このようなポテンシャルの効果は波動関数に対する境界条件として取り入れられるが、その処方はずしも量子力学が許容する数学的に最も一般的なものになっていない。本論文では、このような問題意識のもとに、定常状態シュレーディンガー方程式に対して近年定式化された最も一般的な境界条件に注目し、幾つかの具体例の解析を通じて、一般化された境界条件に起因する興味深い量子効果の存在を示唆する結果を提示している。以下、各章ごとにその内容を概説する。

第1章では導入として、本論文の背景、主題、位置づけについて、関連する多くの先行研究に言及しながら説明している。後半では各章ごとにその内容の要約を列記し、論文全体の概観を与えている。

第2章では主に境界条件の定式化の関数解析的な側面について解説している。まず一般的に、演算子の自己共役拡大は、物理的に意味のある境界条件の設定に関係することを説明している。次に直線 \mathbb{R} および半直線 \mathbb{R}^+ における点状相互作用の場合に、自己共役拡大と整合する最も一般的な境界条件として近年提出された Tsutsui-Fülöp-Cheon (TFC) 関係式 (2001 年) について解説している。これが本論文の主題となる関係式であり、それによると、境界条件は \mathbb{R} の場合は 2 次ユニタリ行列 U により、また \mathbb{R}^+ の場合は実数 L_θ により特徴付けられ、デルタ関数やその微分など諸種の超関数ポテンシャル、また、ディリクレ、ノイマン型条件の一般化が包括的に扱われる。章末には 1 次元水素原子を題材にとり、実際に TFC 関係式を用いた解析の例を提示している。本章は、歴史ある自己共役拡大の理論から近年の TFC 関係式に至るまで、当該分野の短いレビューとして読み易くまとめられている。

第3章では 3 体カロジェロ模型を考察している。これは調和ポテンシャルと逆 2 乗ポテンシャルで相互作用する \mathbb{R} 上の量子多体系である。3 体系の特殊事情として形式的に 3 次元空間の 1 体問題とみなし、極座標による変数分離が可能であるが、その際、角度部分に粒子の衝突に対応する特異ポテンシャルが現れる。TFC 関係式の詳細な解析を行い、境界条件にスケール不変性があるか否かによってエネルギースペクトルの様相が顕著に異なるという結果を得ている。

第4章は非自明な隔壁を持つ 1 次元多粒子系の統計力学に関する先行研究の紹介であり、5 章において本論文独自の拡張結果を提示するための準備になっている。具体的には、隔壁の左右にディリクレ型とノイマン型境界条件を課した自由粒子、および調和振動子の系において、隔壁に生じる圧力差の温度依存性を解析している。それによると自由粒子の場合は高温でも温度の平方根に比例して圧力差が増大し、境界条件の効果が巨視的性質として現れることが主張されている。

第5章では自由粒子が端点でディリクレ型あるいは、擬ノイマン型の境界条件により有限区間に閉じ込められた 1 次元系を考察している。ここで擬ノイマン条件とは、 \mathbb{R}^+ 上の TFC 関係式が許容する境界条件のパラメーター L_θ が系のサイズより大きい場合のことで、 $L_\theta \rightarrow \infty$ の極限として自然にノイマン条件を含む。通常このような「閉じた箱」では系の両端でディリクレ条件を課するのが慣例

であるが、上記の様な境界条件により、系の性質にどのような特徴が生じるかが本章の主題となる。擬ノイマン条件はスケール不変性を破り、スペクトルを定める関係式は超越方程式になる。これを近似解析することにより、状態方程式はファンデルワールス型になること、境界パラメーター L_θ に依存する圧力補正項が生じることなどを示している。これらは境界条件の効果を反映する結果であるが、一方で L_θ が系のサイズより大きいという前提条件から通常の熱力学的極限をとることが出来ず、有限系に限定される結果であることを注意している。

第6章では点状相互作用を持つ円周上のエニオン系を考察している。1次元点状相互作用の特殊性として、粒子交換に際しての波動関数の位相変化はボソン、フェルミオンに対応する $0, \pi$ 以外の値が許容され、エニオン位相と呼ばれる。この自由度と TFC 関係式の要請から、最も一般的な相互作用のパラメーター空間を決定した。これはデルタ関数で相互作用するボース気体(リーブ・リニガー模型)などを含む拡張となっている。パラメーター空間の中で最も非自明な状況では、スペクトルはベテ方程式により決定される。本章では、デルタ関数の係数が負で絶対値が極めて小さく、これとシステムサイズおよび粒子数の対数との積が1より十分小さいという技術的仮定をおいて近似解析を行っている。それによると、高温での状態方程式はファンデルワールス型になり、やはり境界パラメーター L_θ に依存する圧力補正項が生じる。ただし近似解析の仮定により、この結果も5章の結果と同様の注意が必要となる。

第7章では論文全体の要約と展望が述べられており、従来扱われてきた境界条件をより一般化して解析することにより新たな物理が示唆される可能性がある」と総括している。実際の系への応用や、近似のための技術的仮定を緩和して物理的に興味ある領域の解析を進めることは今後の課題であるが、本論文は量子力学の境界条件について多くの新しい知見を提供するものであり、学位論文として十分な内容を持っている。

なお、本論文の一部は筒井泉氏との共同研究に基づくものであるが、論文提出者が主体となって解析および検討を行ったもので、その寄与は十分であると判断する。

以上のことから、博士(理学)の学位を授与できると認める。