論文内容の要旨

論文題目：M-branes, D-branes and U-duality from BLG Model
（BLG 模型における M ブレーン、D ブレーンと U 双対性）

氏名　柴　正太郎

M 理論は、素粒子物理学の統一理論の非常に有力な候補であると考えられている。この理論の低エネルギー極限は 11 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論であり、そこに登場する 3 形式場 $C_{(3)}$ に電気的・磁気的に結合する物理的な存在として、M2-brane や M5-brane と呼ばれる非摂動的な物体が存在することが知られている。11 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論を 7 次元トーラス T^7 上にコンパクト化すると 4 次元 $\mathcal{N}=8$ 超重力理論が得られることから、M 理論には現在我々が知りうる限りのすべての種類の場が矛盾無く組み込まれていると考えられている。

また、M 理論を円周 S^1 または線分 $S^1/\mathbf{Z}_2$ 上にコンパクト化すると、10 次元時空において定義される IIA 型またはヘテロ $E_8\times E_8$ 型超弦理論が得られる。他の 3 種類の超弦理論はこれらと S 双対性、T 双対性で繋がっていることを考えると、M 理論は 5 種類存在する超弦理論を矛盾無く統一する理論であると見做すこともできる。特に、これら S 双対性と T 双対性（または両者を部分群として含む最小の群である U 双対性）を用いると、上述の M-brane（M2-brane と M5-brane）を超弦理論における D-brane と関係付けることができる。

このように M 理論は非常に魅力的な理論である。そして、この理論を理解するためには、その基本的な存在である M-brane の性質を詳しく研究する必要がある。ここで言うところの M-brane の性質とは、11 次元時空内に置かれた M-brane の世界体積上にどのような場が存在し、その場の理論はどのような作用で記述できるかということである。通常、M-brane 上には M-brane の各点が存在する位置を表す座標がスカラー場として存在し、その超対称パートナーであるスピノール場も存在する。また、M-brane は超対称性を一部保持する状態（BPS 状態）であるため、M-brane 上の場の理論には超対称性がなければならない。従って、理論が超対称性を持つように、さらに適切な自由度を持った場が加えられる場合がある。

また、Dirac モノポールと同様の議論から M-brane が持つ charge は量子化されることが結論されるため、M-brane には「枚数」という概念が存在すると考えられている。1 枚の M-brane が 11 次元時空に置かれた系については、それを記述する理論が既に求められている。一方で、複数枚

の M-brane が重なって置かれた系については、M-brane が重なることで生じる内部対称性が存在するはずなのだが、適切な対称性を持つ理論を求めることは長年の懸案であった。

ところが最近、この懸案を解決する可能性を持つ大きな進展として、BLG 模型が提唱された。そこで私はこの模型について詳細な研究を行い、**この学位論文において、BLG 模型から様々な M-brane や D-brane の系を記述する理論が導けること、また BLG 模型において M2-brane と D-brane の間にある U 双対性（の一部）が正しく実現されていることを、その議論と共に示した。**

BLG 模型はもともと、M2-brane が複数枚重なった系を記述する理論として提唱された。この理論には Chern-Simons ゲージ場が存在しており、また M 理論から要請される通り $(2+1)$ 次元で $\mathcal{N}=8$ の超対称性を持っている理論になっている。また、M2-brane が重なることで生じる内部対称性が Lie 3-代数

$$[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}{}_d T^d, \quad \langle T^a, T^b \rangle = h^{ab}\,, \tag{1}$$

という目新しい数学によって記述されるゲージ理論になっており、数学的にも興味深い理論である。ここで、$f^{abc}{}_d$ は構造定数、h^{ab} は計量である。

但し、BLG 模型においてゲージ対称性として用いることができる Lie 3-代数は fundamental identity（通常の Lie 代数における Jacobi identity を一般化したもの）と不変計量条件 $f^{abcd} := f^{abc}{}_e h^{ed} \overset{!}{=} f^{[abcd]}$ が課せられる。実際に研究してみると、この条件は非常に厳しいものであることが分かる。物理的に有効な理論を得るため、有限次元表現かつ計量が正定値の Lie 3-代数の例を探すことにすると、$\mathcal{A}_4$ 代数

$$[T^a, T^b, T^c] = i\epsilon^{abcd} T^d, \quad \langle T^a, T^b \rangle = \delta^{ab}\,, \tag{2}$$

とその直和しかないことが証明できるのである $(a, b, \cdots = 1, \cdots, 4)$。ちなみにこの場合の BLG 模型は、2 枚の M2-brane が重なった系を記述することが分かっている。

従って、我々はさらに他の Lie 3-代数の表現を構成して、それをゲージ対称性として採用した BLG 模型を解析して、その理論はどのような系を記述するかを議論するため、「有限次元表現かつ計量が正定値」という前述の条件を緩和し、無限次元の Lie 3-代数や、計量に負の固有値を持つような Lie 3-代数の具体例を見つける研究を行った。以上の歴史的な背景と BLG 模型の概説、Lie 3-代数の具体例を作る我々の試みを学位論文の Part I に記述した。

Part II では、Lie 3-代数の無限次元表現として Nambu-Poisson 括弧

$$\{f^a, f^b, f^c\} = \epsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\partial f^a}{\partial y^\mu} \frac{\partial f^b}{\partial y^\nu} \frac{\partial f^c}{\partial y^\rho}, \quad \langle f^a, f^b \rangle = \int_{\mathcal{N}} d^3y\, f^a f^b\,, \tag{3}$$

を採用した場合の BLG 模型について解析を行い、その結果を示した。ここで $\mathcal{N}$ は Nambu-Poisson 括弧が定義されている 3 次元多様体、y^μ $(\mu = 1, 2, 3)$ は $\mathcal{N}$ 上の座標、$f^a = f^a(y^\mu)$ $(a = 1, \cdots, \infty)$ は $\mathcal{N}$ 上の関数である。解析の結果、この場合の BLG 模型は、無限枚の M2-brane が 3 次元多様体 $\mathcal{N}$ 上に広がって、1 枚の M5-brane を構成している様子を記述することが分かった。さらに、得られた M5-brane 理論の超対称変換などを調べることにより、3 次元多様体 $\mathcal{N}$ 上に M 理論の 3 形式場 $C_{(3)}$ が背景場として存在している場合の M5-brane の系を記述していることも分かった。

さらに、この Nambu-Poisson 括弧を少々人工的に切断することで有限次元表現を作り、その場合の BLG 模型も解析した。この場合、Lie 3-代数の計量が多数の零固有値を持つため、作用そ

のものを解析して非自明な結果を得ることはできないのだが、我々は運動方程式を解析することで、有限枚の M2-brane が重なった系の性質を解析することに成功した。特に、有名な $N^{\frac{3}{2}}$ 則、すなわち N 枚の M2-brane が重なった系の自由度は $N^{\frac{3}{2}}$ に比例するという AdS/CFT 対応から得られる法則が、BLG 模型から自然に導かれることを具体的に示すこともできた。このことは、BLG 模型が確かに複数枚の M2-brane の系を記述する理論であることを、非常に強力に保証していると考えられる。

Part III では、Lorentzian Lie 3-代数と呼ばれる代数を用いた場合の BLG 模型を解析した。この代数は、任意の Lie 代数 $\mathcal{G}$ の元 T^i に Lorentzian 計量を作る元の組 u, v を加えて、次のように構成される。

$$\begin{aligned}&[u, T^i, T^j] = i f^{ij}{}_k T^k\,, \quad [T^i, T^j, T^k] = -i f^{ijk} v\,, \quad [v, *, *] = 0\,,\\ &\langle u, v\rangle = 1\,, \quad \langle T^i, T^j\rangle = h^{ij}\,, \quad \text{otherwise} = 0\,.\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$f^{ij}{}_k$ と h^{ij} は Lie 代数 $\mathcal{G}$ の構造定数と計量 (Killing form) である。この場合、$\langle u - \alpha v, u - \alpha v\rangle < 0$ $(\alpha > 0)$ となるため、Lie 3-代数の計量は負の固有値を持ち、理論に登場する場の u, v 成分はゴースト場を作ってしまい、理論のユニタリー性が保証できなくなってしまっている。しかしながら、これらはある種の Higgs 機構を用いて、これらの場に VEV を与えることで消せることが示される。しかも、驚くべきことに、この機構を用いるとゲージ対称性も 3 次元 $\mathcal{N} = 8$ の超対称性も一切破らずにゴースト場を消すことができるのである。但し、ゴースト場を処理すると、垂直方向の空間次元が 1 個だけ理論から消えてしまう。これは 10 次元時空における 2-brane、すなわち超弦理論における D2-brane を記述する理論となることを示している。実際、Lie 代数 $\mathcal{G}$ として $U(N)$ を選んでおくと、この場合の BLG 模型は N 枚の D2-brane が重なった系を再現することが示される。

この代数はさらに一般化することができる。Lorentzian Lie 3-代数における Lie 代数 $\mathcal{G}$ として、Kac-Moody 代数やループ代数を同様に Lorentzian 計量を作る元を加えることで中心拡大 (central extension) した代数を用いると、BLG 模型は複数枚の Dp-brane が $(p-2)$ 次元トーラス T^{p-2} 上に巻きついた系を記述することが示される $(p \geq 3)$。この場合も複数個あるゴースト場については、同様に VEV を与えることでゲージ対称性と超対称性を破らずに消すことができる。

また、最終的に得られる理論を見ると、この VEV が D-brane の巻きついたトーラスのモジュライやトーラス上の場を記述することも分かる。これらの情報を用いると、BLG 理論の中で U 双対性がどのように再現されているかを議論することができる。今の場合、BLG 模型は Dp-brane を記述しているが、もともとの BLG 模型は M2-brane を記述しているのであったから、両者を比較することにより、BLG 模型が M2-brane と Dp-brane の間にある U 双対性の関係をどのように表現しているかを調べることができる。その結果、我々は BLG 模型が U 双対性の一部を正しく再現していることを確認した。特に D3-brane と D4-brane の場合は、BLG 模型から U 双対性全体が正しく導かれることを示すことができた。

以上から分かるように、BLG 模型は M-brane や D-brane の系を幅広く記述し、しかもその間にある U 双対性も正しく再現することのできる、物理学的に価値の高い理論である。未だ M2-brane そのものの理解を深めたとは言い切れないが、その点も含めて今後進むべきと思われる研究の方向性を最後に示し、以上すべての議論をもって学位論文とした。