論文の内容の要旨

論文題目： Vertex operators and background solutions
for ultradiscrete soliton equations
和訳： 超離散ソリトン方程式における頂点作用素と背景解

氏　名　　中田 庸一

1　序

高橋・薩摩によって提出された箱玉系 [1]

$$B_j^{t+1} = \min\left(1 - B_j^t, \sum_{n=-\infty}^{j-1} (B_n^t - B_n^{t+1})\right) \tag{1}$$

に代表されるソリトンセルオートマトンは、ソリトン的な性質をもつセルオートマトンとして知られ、さらに離散ソリトン方程式の非解析的極限 (超離散化 [2]) として得られることが分かった。ソリトンセルオートマトンおよび超離散ソリトン方程式はソリトン方程式が持つよい代数構造や対称性といったものを保っていると考えられており、さらに最近では代数幾何や表現論との関連も指摘されているため、超離散系が持つ代数構造に興味が集まっている。

超離散系だけで閉じた議論による代数的構造を持つ解の構成としては高橋、広田らによる Casorati 行列の超離散対応物であるパーマネント型の解を用いた表現 [3] があり、可積分方程式では解の本質的構造を記述した Plücker 関係式のパーマネント型の解における対応物については長井によって提出された [4]。

本論文ではまず超離散ソリトン方程式における代数的構造を持つ解の別な構成として、頂点作用素の超離散類似物を提出する。ソリトン方程式における頂点作用素とは N-ソリトン解を $N+1$-ソリトン解に写す作用素であり、全てのソリトン解は頂点作用素によって生成されることが知られている。論文中では同様の効果を持つ作用素を超離散 KdV 方程式、及びその拡張版となる超離散 KP 方程式について提出した。多くの離散ソリトン方程式が、離散 KP 方程式の解を制限することで得られたように、超離散 KP 方程式の解を制限することで様々な超離散ソリトン方程式が得られるため、超離散 KP 方程式の頂点作用素が分かれば他のソリトン方程式の頂点作用素を記述することが出来る。

箱玉系 (1) の初期値問題は $B_j^0 \in \{0,1\}$ の場合は間田らによって組み合わせ論を用いて解決され [5]、ソリトンのみであることが確認されたが、初期値がこの範囲を出た場合、図 1 のようなソリトンだけではなく正負入り交じり一定速度で動く解があることが知られており、このような波のみが存在する場合については広田 [6] によって解の明示的表記が得られている。

$$
\begin{array}{cl}
 & \xrightarrow{j} \\
 & \texttt{.4}\underline{\texttt{3}}\texttt{4}\underline{\texttt{1}}\underline{\texttt{2}}\texttt{2.............} \\
 & \texttt{.}\underline{\texttt{3}}\texttt{4}\underline{\texttt{3}}\texttt{23}\underline{\texttt{1}}\texttt{11...........} \\
 & \texttt{..}\underline{\texttt{3}}\texttt{4}\underline{\texttt{3}}\underline{\texttt{2}}\texttt{2..111111.....} \\
t\downarrow & \texttt{...}\underline{\texttt{3}}\texttt{4}\underline{\texttt{3}}\underline{\texttt{2}}\texttt{11......11111} \\
 & \texttt{....}\underline{\texttt{3}}\texttt{4}\underline{\texttt{3}}\underline{\texttt{2}}\texttt{.11.........} \\
 & \texttt{.....}\underline{\texttt{3}}\texttt{4}\underline{\texttt{3}}\underline{\texttt{2}}\texttt{..11.......}
\end{array}
$$

図 1　適当な初期値を与えたもの。下線は負値を表す

我々はその解の一般化として超離散ソリトン方程式の特殊解となる背景解と呼ばれる解を提出し、さらにその背景解には頂点作用素によってソリトンを追加することが出来ることを示す。一般の初期値について箱玉系は時間発展により必ず背景解とソリトンに分離することが経験的に知られているため、任意の初期値にどのようなソリトンが含まれているかの情報が分かれば初期値問題の解答を与えることが期待できる。

2　超離散ソリトン方程式における頂点作用素

非自励超離散 KP 方程式は以下で与えられる (ただし $R_n > 0$ とする)。

$$T_{l,m+1,n} + T_{l+1,m,n+1} = \max\left(T_{l+1,m,n} + T_{l,m+1,n+1} - 2R_n, T_{l,m,n+1} + T_{l+1,m+1,n} \right) \tag{2}$$

この方程式の “N-ソリトン解” としてソリトンパラメータ $P_1, \ldots, P_N, Q_1, \ldots, Q_N$ および位相パラメータ $C_1, \ldots, C_N$ を持つ関数を考える。頂点作用素を考える上では独立変数 l, m, n よりもパラメータのほうが重要なので、$T(P_1, \ldots, P_N; Q_1, \ldots, Q_N; C_1, \ldots, C_N)$ のように表し、省略のためさらに $T(\boldsymbol{P}; \boldsymbol{Q}; \boldsymbol{C})$ と表す。“N-ソリトン解”$(N \geq 1)$ は以下のように “$N-1$-ソリトン解”$T(P_1, \ldots, P_{N-1}; Q_1, \ldots, Q_{N-1}; C_1, \ldots, C_{N-1}) = T(\boldsymbol{P}'; \boldsymbol{Q}'; \boldsymbol{C}')$ を用いて定義される。

$$T(\boldsymbol{P}; \boldsymbol{Q}; \boldsymbol{C}) := \max\left(T(\boldsymbol{P}'; \boldsymbol{Q}'; \boldsymbol{C}'), 2\eta_N + T(\boldsymbol{P}'; \boldsymbol{Q}'; \boldsymbol{C}' - \boldsymbol{A}'_N)\right) \tag{3}$$

ここで η_N は

$$\eta_N = C_N + lP_N - mQ_N - \sum_0^n \min(Q_N, R_{d-1}) \tag{4}$$

であり、$\sum_0^n \Omega_{N,d}$ は

$$\sum_i^j \Omega_{N,d} = \begin{cases} \sum_{d=i+1}^j \Omega_{N,d} & (i < j) \\ 0 & (i = j) \\ -\sum_{d=j+1}^i \Omega_{N,d} & (i > j) \end{cases}, \tag{5}$$

を意味する。さらに $\boldsymbol{A}'_N$ は

$$\boldsymbol{A}'_N = {}^t(A_{1,N}, \ldots, A_{N-1,N}) \qquad A_{i,j} = \min(P_i, P_j) + \min(Q_i, Q_j) \tag{6}$$

である。またソリトンパラメータ $P_i, Q_i (i = 1, \ldots, N)$ は以下の条件を満たしているものとする。

$$(P_i - P_j)(Q_i - Q_j) \geq 0 \tag{7}$$

また $N=1$ のときは $T(\boldsymbol{P}';\boldsymbol{Q}';\boldsymbol{C}')$ は一切パラメータを持たない真空解

$$T(;;)=0 \tag{8}$$

であるとする。ここで (3) における右辺は、$N-1$-ソリトン解 $T(\boldsymbol{P}';\boldsymbol{Q}';\boldsymbol{C}')$ がパラメータ P_N,Q_N,C_N を持つ作用素 $X(P_N,Q_N,C_N)$ によって $T(\boldsymbol{P};\boldsymbol{Q};\boldsymbol{C})$ に写った先であると考える。すなわち

$$X(P_N,Q_N,C_N)T(\boldsymbol{P}';\boldsymbol{Q}';\boldsymbol{C}') := T(\boldsymbol{P};\boldsymbol{Q};\boldsymbol{C}) \tag{9}$$

この作用素 $X(P_N,Q_N,C_N)$ が超離散系における頂点作用素の類似物であると考えられる。

連続でのソリトン方程式での頂点作用素は KP 方程式の場合、無限個の独立変数を用いて

$$X(p,q)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}(p^k-q^k)x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{p^k}-\frac{1}{q^k}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \tag{10}$$

のように表されるが、この無限個の独立変数のずれによって現れる項 (相互作用項) に対応しているのが (3) における位相のずれであると考えられる。

頂点作用素は互いに交換可能でありパラメータの添字の入れ替えに対する不変になるので、一般性を失うことなくパラメータの順序を固定することが出来る。例えば超離散 KP 方程式の場合、P_i,Q_i に対し順番を

$$P_N \geq P_{N-1} \geq \ldots \geq P_1 \geq 1 \tag{11}$$

$$Q_N \geq Q_{N-1} \geq \ldots \geq Q_1 \geq 1 \tag{12}$$

と固定した場合、位相のずれは $i \geq j$ に対し $A_{i,j}=P_j+Q_j$ と簡単になり、このずれは独立変数 l,m のずれに組み入れることが出来る。即ち再帰的表現 (3) は、独立変数 l,m のずれと $\max,\pm$ のみを用いて

$$T_{l,m,n}^{(N)}=\begin{cases}\max\left(T_{l,m,n}^{(N-1)},2\eta_N+T_{l-1,m+1,n}^{(N-1)}\right) & (N\geq 1)\\ 0 & (N=0)\end{cases} \tag{13}$$

と表される。解であることを証明はこの表現を用い、max に関する不等式

$$\max(x,y)-\max(z,w)\leq\max(x-z,y-w) \tag{14}$$

と数学的帰納法を用いて行われる。

離散ソリトン方程式の場合と同様に、超離散 KP 方程式の解を制限することによって様々な方程式が現れることが知られている。例えば解を

$$T_{l,m,n}=F_n^{l-Mm} \tag{15}$$

の形に制限した場合、超離散ハングリー KdV 方程式が現れることが知られている。また同様に解を

$$T_{l,m,n}=F_{m+n}^{l+n} \tag{16}$$

のように制限することによって超離散戸田方程式が現れる。いずれの制限もパラメータ P_i,Q_i に対して制約を課すことと等価であるため、前述の頂点作用素に同様の制限を課すことによってそれぞれの方程式に対する頂点作用素を作ることが出来る。さらに変数変換によって、それぞれソリトンセルオーマトンに写ることが知られており、この頂点作用素によってソリトンが増えていくことが確認される。

3 超離散ソリトン方程式における背景解及び頂点作用素によるソリトンとの混合

R_n を一定とした超離散 KP 方程式の解の中で

$$T_{l,m,n} = T^0_{l,m+n} \tag{17}$$

の形になるものを考える。$T^0_{l,m+n}$ が解になるための条件は $0 \le K \le R$ で $T^0_{l,s}$ が

$$T^0_{l+1,s} + T^0_{l,s+2} - T^0_{l,s+1} - T^0_{l+1,s+1} \le 2K \tag{18}$$

となる K が存在することである。$T^0_{l,s}$ についてさらに $L \ge 0$ で

$$T^0_{l,s+1} + T^0_{l+2,s} - T^0_{l+1,s} - T^0_{l+1,s+1} \le 2L \tag{19}$$

を満たす L が存在するという条件を加えると、$T^{(0)}_{l,m,n}$ を 0 の代わりに $T^0_{l,m+n}$ とした $T^{(N)}_{l,m,n}$ が超離散 KP 方程式の解になることが示される。この $T^0_{l,s}$ には従来のソリトン解からは外れた解を含めることが出来、さらに $T^{(N)}_{l,m,n}$ はそのような解にソリトンを加えたものと考えることが出来るため、この形の解を背景解と呼ぶことにする。

一方、このような背景解はソリトンセルオートマトンの時間発展によって現れることが知られている。例えば超離散 KdV 方程式

$$F^{t+2}_{j+1} + F^t_j = \max(F^t_{j+1} + F^{t+2}_j - 2R, F^{t+1}_{j+1} + F^{t+1}_j) \tag{20}$$

について、その解は超離散 KP 方程式の解を

$$T_{l,m,n} = F^{l-m}_n \tag{21}$$

と制限し $l - m = t, n = j$ とすることで得られることが知られているが、境界条件を満たす背景解として以下によって定義される travelling wave 解がある [6]。

$$F_0(x) = \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}} B_0(x_0) G(x + x_0) \tag{22}$$

ただし $G(x) = \max(0, 2x)$ とし、$B_0(x)$ は

$$B_0(x) + B_0(x) \le R \tag{23}$$

を満たしているものとする。この解は背景解の中で $T^0_{l,m+n} = F_0(l - m - n)$ としたものに対応している。また $R = 1$ の超離散 KdV 方程式は変数変換

$$B^t_j = \frac{1}{2}\left(F^{t+1}_j + F^t_{j+1} - F^{t+1}_{j+1} - F^t_j\right), \tag{24}$$

を用い、箱玉系 (1) に移ることが知られている。

箱玉系の初期値に具体的な値を与えたときの初期値問題を頂点作用素を用いて解いてみよう。図 1 の場合 1 の固まりがソリトン (長さはソリトンパラメータの値) に対応しているので、残りの $-3, 4, -3, 2$ が $F_0(x)$ に

対応している。実際、

$$
\begin{aligned}
F_j^{(N),t} &= \begin{cases} \max(F_j^{(N-1),t}, 2(C_N - j\min(Q_N, 1) + tQ_N) + F_j^{(N-1),t-2}) & (N \geq 1) \\ F_0(t-j) & (N=0). \end{cases} \\
F_0(x) &= -3G(x-1) + 4G(x) - 3G(x+1) + 2G(x+2).
\end{aligned} \tag{25}
$$

に対し、$N = 2, Q_1 = 2, C_1 = 0, Q_2 = 6, C_2 = -8$ としたものがこの初期値問題の解を与えていることが分かる。任意の整数値を初期値とした箱玉系の問題についても、そこにどんなソリトンが含まれているのかが分かれば同様に F_j^t を明示的に与えられることが出来る。

参考文献

[1] D. Takahashi and J. Satsuma. A soliton cellular automaton. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 59:3514–3519, 1990.

[2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma. From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3247–3250, 1996.

[3] D. Takahashi and R. Hirota. Ultradiscrete soliton solution of permanent type. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 76:104007, 2007.

[4] H. Nagai. *On Mathematical Structure of Solutions to Some Discrete Integrable Systems.* PhD thesis, Waseda University, 2009.

[5] J. Mada, M. Idzumi, and T. Tokihiro. The box-ball system and N-soliton solution of the ultradiscrete KdV equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:no. 17, 1757207, 23pp., 2008.

[6] R. Hirota. New Solutions to the Ultradiscrete Soliton Equations. *STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS*, 122:361–376, 2009.