

論文審査の結果の要旨

氏名 中田 庸一

高橋・薩摩によって提出された箱玉系に代表されるソリトンセルオートマトンは、ソリトンの性質をもつセルオートマトンとして知られ、さらに離散ソリトン方程式の非解析的極限(超離散化)として得られることが分かっている。ソリトンセルオートマトンおよび超離散ソリトン方程式はソリトン方程式が持つよい代数構造や対称性といったものを保っていると考えられており、さらに最近では代数幾何や表現論との関連も指摘されているため、超離散系が持つ代数構造に興味が集まっている。

これまで、超離散系だけで閉じた議論による代数的構造を持つ解の構成としては高橋、広田らによるCasorati 行列の超離散対応物であるパーマメント型の解を用いた表現があり、可積分方程式では解の本質的構造を記述したプリュッカー関係式のパーマメント型の解における対応物については長井によって提出された。

これに対し、論文提出者は、まず超離散ソリトン方程式における代数的構造を持つ解の別な構成として、頂点作用素の超離散類似物を提案した。ソリトン方程式における頂点作用素とは N -ソリトン解を $N+1$ -ソリトン解に写す作用素であり、全てのソリトン解は頂点作用素によって生成されることが知られている。同様の効果を持つ作用素を超離散KdV 方程式、及びその拡張版となる超離散KP 方程式について提出したものである。離散ソリトン方程式の場合、こうした頂点作用素を具体的に表現することはできていない。論文提出者は、 $\text{Max}+$ の操作をのみでこの頂点作用を構成し、いくつかの超離散系のソリトン解(の別表現)を具体的に求めた。多くの離散ソリトン方程式が、離散KP 方程式の解を制限することで得られたように、超離散KP 方程式の解を制限することで様々な超離散ソリトン方程式が得られるため、超離散KP 方程式の頂点作用素によって、他のソリトン方程式の頂点作用素による記述を可能にしている。

さらに、論文提出者は、この頂点作用素のソリトン解以外の解への適用を行い、箱玉系の一般的な初期値に対する初期値問題に適用可能であることを示している。箱玉系の初期値問題は間田らによって組み合わせ論を用いて解決され、ソリトンのみであることが確認されたが、初期値が $0, 1$ 以外の値をとる場合、ソリトンだけではなく正負入り交じり一定速度で動く解があることが知られていた。このような波のみが存在する場合については広田によって解の明示的表記が得られていたが、超離散極限として離散方程式の解から構成する方法は適用できず、一般的な初期値問題ばかりでなく、こうした解の具体的な表示式に関してもまったく手つかずの状態であった。論文提出者はその解の一般化として超離散ソリトン方程式の特殊解となる背景解と呼ばれる解を具体的に構成し、さらにその背景解には頂点作用素によってソリトンを追加することが出来ることを示

した。この背景解は、頂点作用素が作用しうる解のうち、おそらく最も一般的であるとおもわれる超離散KP方程式の解にある条件を与えたものとして特徴づけられている。一般の初期値について箱玉系は時間発展により必ず背景解とソリトンに分離することが経験的に知られているため、任意の初期値にどのようなソリトンが含まれているかの情報が分かれば初期値問題の解答を与えることが期待できる。これは、最近注目されている超離散系のネガティブソリトンやソリトン解以外の初期値問題への応用にも関係し、ひとつの重要な発見である。

以上のように、論文提出者は **Max+**代数のみで閉じた構成方法による超離散系の新たな解法を見出したものであり、超離散可積分系の発展に大きく寄与している。よって、論文提出者中田庸一は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。