

論文審査の結果の要旨

酒 匂 宏 樹

本論文において、論文提出者は離散群の測度同値性に関する興味深い研究を行った。

Gromov は、測度カップリングと呼ばれる、二つの離散群の作用付きの測度空間を用いて、離散群の測度同値という概念を定義した。これは、二つの離散群が軌道同値な保測作用を持つという条件を少し弱めて、アンプリフィケーションを許したものにあたっている。これはまた、幾何学的群論における擬等長性の概念の測度論的類似でもある。これを研究することは直接的には、エルゴード理論および離散群論の問題であるが、S. Popa や小沢登高の近年の研究を通じて、作用素環の理論と密接な関係があることが注目されて来ており、論文提出者の研究もこの結びつきに重点を置いたものである。

離散群の性質については従順性が古くから知られている。ここで考えている枠組みでは、従順性は「整数群 \mathbb{Z} にとても近い」という性質と言える。一方、離散群の完全性とは、群 C^* -環が短完全列とテンソル積についてよいふるまいをするという条件で定義されるものである。完全な離散群はきわめて大きなクラスをなしており、具体的な離散群は、たいてい完全である。近年、離散群の完全性が作用素環論で重要な役割を果たすことが分かってきている。

指数有限の部分群や商群は、元の群と測度同値であることは定義からすぐわかる。また、すべての可算従順群は、互いに測度同値であることがわかっており、これを見ると、測度同値性は少し弱い同値関係のようだが、ある種の状況下では、測度同値性から、二つの離散群がほとんど同型であることが導かれる。これが剛性と呼ばれる現象であり、近年盛んに研究されており、作用素環論における多くの重要な結果に関連している。

また、小沢登高は離散群のクラス S を、ストーン-チェック境界への両側作用の従順性を用いて定義した。このクラスは、従順群のクラスより大きく、完全群のクラスより小さい。論文提出者は、ある離散群がこのクラス S に属していれば、その群と測度同値な離散群もやはりこのクラスに属することを示した。これはそのような離散群の群 von Neumann 環についての理解も深める興味深い結果である。

さて、ある離散群から別の離散群を作る方法がいくつかよく知られている。ここで考える構成法は、直積、リース積、融合積である。本申請者は、このようにして作られた群同士が測度同値であるとき、もとの群同士の測度同値性が導かれるかという問題を考察した。測度同値性が、離散群のある種の分解について遺伝するか、という問題と言ってもよい。これについて、本申請者は次の3つの肯定的結果を得た。

まず直積の場合は、非従順な完全群の有限個の直積と、クラス S の群の有限個の直積について考察した。前者の群の個数が後者の群の個数以上と仮定すると、実は両者の個数が一致し、番号を適当に並べ直せば、各直積因子同士が測度同値になることを示した。

また、非従順な完全群と無限完全群の直積の形の離散群二つについて、別の二つの群を底とするリース積を考えたときに、それらが測度同値になれば、もとの直積群同士が測度同値であることを示した。

さらに非従順な完全群二つの直積を二つ考え、共通の従順部分群による融合積を考える。このような形の融合積が二つあってそれらが測度同値であれば、融合積を取る前の群同士が測度同値であることも示した。

これらはいずれも、近年注目を集めている重要な問題について、最新の技術を駆使して得られた興味深い結果であり、これからの進展、応用も大いに期待できるものである。よって、論文提出者酒匂宏樹は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。