論文の内容の要旨

論文題目：The abelianization of the level d mapping class group
（レベル d 写像類群のアーベル化）

氏名：佐藤 正寿

d を 2 以上の整数とする．本論文では, 曲面の写像類群の指数有限正規部分群である, レベル d 写像類群のアーベル化, つまり整係数 1 次ホモロジー群を計算した．特に $d = 2$ または奇数についてはこのアーベル化を完全に決定した．

種数 $g \geq 1$ の有向閉曲面を Σ_g とし, 埋め込まれた閉円板 $D \subset \Sigma_g$ を 1 つ固定する．写像類群 $\mathcal{M}_{g,0}$ は向きを保つ微分同相群 $\mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ の弧状連結成分のなす群として定義される．同様に閉円板 D を固定する写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を D の各点を保つ微分同相群 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g, D)$ の弧状連結成分のなす群として定義する．$r = 0, 1$ について, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}$ は曲面の整係数 1 次ホモロジー群に作用するが, この作用の核を Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}$ と呼ぶ．また, d 次巡回群を $\mathbf{Z}_d$ と表すとき, レベル d 写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}[d]$ とは, 写像類群から曲面の $\mathbf{Z}_d$ 係数 1 次ホモロジー群への作用の核として定義される．

本論文の動機は写像類群の指数有限部分群の低次整係数ホモロジー群を決定することにあるが, Mennicke [8] により, Torelli 群を含む写像類群の指数有限正規部分群は, ある d についてレベル d 写像類群を含むことが知られており, この意味でレベル d 写像類群は写像類群の基本的な指数有限部分群である．なお, 特にレベル d 写像類群の整係数ホモロジー群は, $d \geq 3$ についてはレベル d 構造をもつ Riemann 面のモジュライ空間の整係数ホモロジー群に一致することが知られている．

これまでに知られている指数有限部分群の安定ホモロジー群に関する結果は, 次のものがある．まず, 写像類群は曲面のスピン構造全体からなる集合に作用するが, 1 つのスピン構造を固定する写像類群の元全体のなす部分群はスピン写像類群と呼ばれ, ホモロジー群が計算されている．まず, Lee-Miller-Weintraub [7] は Theta multiplier と呼ばれる曲面のスピン構造と関係する解析的数を用いて, スピン写像類群上に準同型を構成した．さらに Harer [3] はスピン写像類群の curve 複体への作用を調べ, アーベル化の位数の上からの評価が与え, 種数について安定的に決定した．またさらに, 安定有理係数 2 次ホモロジー群も決定した．Galatius [2] は安定ホモトピー理論を用

いて, スピン写像類群の安定 mod 2 コホモロジー群を決定した. また, 著者は [12] において, 2 重被覆の構造を保つ写像類群の部分群について, 被覆曲面と底曲面それぞれに定まる Theta multiplier を用いて加群への準同型を構成し, 安定的にアーベル化を決定している. また, Johnson [6] は Torelli 群上に, 現在 Johnson 準同型と呼ばれる加群への全射準同型を構成したが, d が奇数の場合について, Perron [9], Putman [10] はレベル d 写像類群上に Johnson 準同型の $\bmod d$ reduction を拡張し, 本論文とは独立にアーベル化を決定している. また, 一般の d について Putman [11] により curve 複体への作用を調べることにより, 有理係数 2 次ホモロジー群も決定している.

以下, 本論文の結果について述べる. まず, レベル 2 写像類群のアーベル化は次のように表される.

定理 1. $g \geq 3$ のとき,

$$H_1(\mathcal{M}_{g,1}[2]; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2^{\binom{2g}{1}} \oplus \mathbf{Z}_4^{\binom{2g}{2}} \oplus \mathbf{Z}_8^{\binom{2g}{3}}.$$

写像類群は曲面の整係数 1 次ホモロジー群に作用するが, 整係数 1 次ホモロジー群の交叉形式に関するシンプレクティック基底を 1 つ固定すると, シンプレクティック群への全射準同型 $\iota : \mathcal{M}_{g,r} \to \mathrm{Sp}(2g; \mathbf{Z})$ が定まる. 特に, レベル d 写像類群の ι による像はシンプレクティック群の主 d 合同部分群 $\Gamma_g[d]$ に一致し, 次の完全列が成り立つ.

$$1 \longrightarrow \mathcal{I}_{g,r} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,r}[d] \longrightarrow \Gamma_g[d] \longrightarrow 1$$

これはホモロジー群の間に完全列

$$H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}_d) \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

を誘導し, 特に上で述べたレベル 2 写像類群のアーベル化を用いて, $d = 2$ として次が得られる.

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[2]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[2]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

d が偶数のときについて, レベル d 写像類群からレベル 2 写像類群への自然な包含写像の誘導するホモロジー群の間の準同型を調べることにより, 次のように $\mathbf{Z}_2$ 拡大を除いてアーベル化が決定される.

系 2. $g \geq 3$, d が偶数のとき,

$$\mathbf{Z}_2 \longrightarrow H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}_d) \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

上で述べたレベル 2 写像類群のアーベル化の決定は, 具体的に加群への準同型を構成することにより行われる. 写像類 $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}[2]$ を用いてファイバーの閉曲面 Σ_g を貼り合わせて得られる写像トーラスを $M_\varphi = \Sigma_g \times [0,1]/(f(x), 0) \sim (x, 1)$ と表す. 写像トーラスをスピン多様体として境界にもつ 4 次元多様体の符号数を用いて, Rochlin 関数と呼ばれる写像トーラスのスピン構造全体からなる集合上に $\mathbf{Z}_{16}$ に値を持つ関数が定まる. これを用いてレベル 2 写像類群から加群への準同型を構成した. この値は, 写像トーラスに埋め込まれた曲面に定まる Pin^- 構造の Brown 不変量, もしくは, 写像トーラスの表すスピンボルディズム類を用いて言い換えることができる.

特にこの準同型はスピンボルディズム類の言葉では次のように表せる. 写像類 $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}[2]$ について, 議論を容易にするため写像トーラスではなく, $D \times S^1 \subset M_\varphi$ に沿って写像トーラスに手術を施した閉 3 次元多様体 $M'_\varphi := (M_\varphi - D \times S^1) \cup (\partial D \times D^2)$ を考える. この多様体の 1 次ホモロジー群には自然に同型 $H_1(M'_\varphi; \mathbf{Z}_2) \cong H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z}_2)$ が定まる. この同型は M'_φ から Eilenberg-MacLane 空間 $K(H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z}_2), 1)$ への連続写像のホモトピー類を定めるが, これを代表する連続写像を 1 つとり $f : M'_\varphi \to K(H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z}_2), 1)$ とおく. また, 多様体 M のスピン構造全体の集合を $\mathrm{spin}\, M$ と表すとき, 自然に全単射 $\theta : \mathrm{spin}\, \Sigma_g \cong \mathrm{spin}\, M'_\varphi$ が定まる. これを用いて, $\sigma \in \mathrm{spin}\, \Sigma_g$ について, $K(H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z}_2), 1)$ の 3 次スピンボルディズム群への写像

$$\eta_{\sigma,2}[2] : \mathcal{M}_{g,1}[2] \to \Omega_3^{\mathrm{spin}}(K(H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z}_2), 1))$$

を $\varphi \mapsto [M'_\varphi, \theta(\sigma), f]$ と定義すると, これは準同型であることがわかる. Heap [4] は写像類群の部分群の降下列である Johnson filtration において, このスピンボルディズム類を用いた準同型を既に構成していたが, その値については filtration の 1 番目である Torelli 群について数例が計算されているのみだった. 本論文の準同型はこの自然な類似物であり, Humphries [5] の得たレベル 2 写像類群の生成系について, この値を具体的に計算することによりこの準同型の像を調べ, レベル 2 写像類群のアーベル化に単射を誘導することを示し, アーベル化を決定した.

次に d が奇数の場合について述べる. 先ほど述べた群の完全列から誘導されるホモロジー群の完全列について, この場合は次のように split することがわかる.

定理 3. *$g \geq 3$, かつ, d が奇数のとき,*

$$H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) = H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}_d) \oplus H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}).$$

なおここで, $H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}_d)$ は Johnson により計算されており, $H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z})$ は Mennicke [8], もしくは, Bass-Milnor-Serre [1] による合同部分群に関する結果を用いて, 本論文において計算している.

手法は, Torelli 群上の Johnson 準同型の $\bmod d$ reduction を, レベル d 写像類群上に拡張し, ホモロジー完全列の splitting を構成することである.

謝辞

本論文の作成にあたり, 修士の頃より指導教官である河澄響矢先生より熱心なご指導と数々の助言をいただいたことに心より感謝いたします. また, 写像類群等に関する力強い講義を拝聴させていただき, 修士課程および博士課程中に温かい励ましの言葉をかけてくださった森田茂之先生, お時間を割いて研究内容を聞いてくださり, 数々の有益な助言をいただいた古田幹雄先生に深く感謝いたします.

参考文献

[1] H. Bass, J. Milnor, and J.P. Serre, *The congruence subgroup property for SL_n ($n \geq 3$) and SP_{2n} ($n \geq 2$)*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math **33** (1967), 59–137.

[2] S. Galatius, *Mod 2 homology of the stable spin mapping class group*, Mathematische Annalen **334** (2006), no. 2, 439–455.

[3] J. L. Harer, *The rational Picard group of the moduli space of Riemann surfaces with spin structure*, Contemp. Math **150** (1993), 107–136.

[4] A. Heap, *Bordism Invariants of the Mapping Class Group*, Topology **45** (2006), no. 5, 83–124.

[5] S.P. Humphries, *Normal closures of powers of Dehn twists in mapping class groups*, Glasgow Math. J **34** (1992), no. 3, 313–317.

[6] D. Johnson, *The structure of the Torelli Group III: The abelianization of $\mathcal{I}_g$*, Topology **24** (1985), no. 2, 127–144.

[7] R. Lee, E. Miller, and S. Weintraub, *The Rochlin invariant, theta functions and the holonomy of some determinant line bundle*, J. reine angew. Math **392** (1988), 187–218.

[8] J. Mennicke, *Zur Theorie der Siegelschen Modulgruppe*, Mathematische Annalen **159** (1965), no. 2, 115–129.

[9] B. Perron, *Filtration de Johnson et groupe de Torelli modulo p, p premier*, Comptes Rendus Mathematique **346** (2008), no. 11-12, 667–670.

[10] A. Putman, *The abelianization of the level L mapping class group*, arXiv:0803.0539 (2008).

[11] ———, *The second rational homology group of the moduli space of curves with level structures*, arXiv:0809.4477v1 (2008).

[12] M. Sato, *The abelianization of a symmetric mapping class group*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 147, Cambridge University Press, 2009, pp. 369–388.