

論文審査の結果の要旨

氏名 佐藤 正寿

リーマン面の写像類群そのもののホモロジーの研究は I. Madsen と M. Weiss による安定コホモロジーの決定によってひと段落ついた状況にある。しかしながら、リーマン面の深いトポロジーは、写像類群そのものよりも、トレリ群やジョンソン核そして本論文の主題であるレベルつき写像類群にこそ明確な姿を表すことが予想される。このことはトレリ群およびジョンソン核についてはこれまでに D. Johnson、森田茂之、R. Hain などの研究によって明らかにされてきた。本論文は、このことをレベルつき写像類群について雄弁に立証したものと云えよう。

レベルつき写像類群は、算術群における合同部分群の写像類群における対応物でありレベルつき代数曲線のモジュライ空間の基本群である。したがってそのホモロジー群は位相幾何学のみならず数論、複素幾何学および代数幾何学においても基本的重要性をもつ。R. Hain および J. McCarthy はレベルつき写像類群のアーベル化つまり第一ホモロジー群が階数 0 となること、つまりねじれ群となることを証明した。しかしねじれ部分を決定するには、彼等の方法は無力であり新しい着想が必要である。レベルつき写像類群のアーベル化の決定は、その問題の基本的重要性にも関わらず、近年まで手が付けられていなかった。

論文提出者 佐藤正寿 は、本論文においてレベル d 写像類群のアーベル化を、 d が 2 の場合と奇数の場合に完全に決定し、 d が 4 以上の偶数の場合に二次巡回群の曖昧さを除いて決定した。なお、本論文のプレプリントのインターネットへの公開後、A. Putman は佐藤の結果を受けて d が 4 の倍数でない偶数の場合に二次巡回群の曖昧さを取り除いている。 d が奇数の場合は、拡張されたジョンソン準同型を用いて比較的簡明に決定することができる。とくにそこでは d -torsion のみが現れる。この部分は同じ時期に B. Perron および A. Putman によっても決定されている。これに対して d が偶数の場合は、トレリ群における Birman-Craggs 準同型の存在から、はるかに複雑であることが予想され、実際、佐藤の計算によりその通り複雑であった。佐藤は、まずトレリ群の Birman-Craggs 準同型の A. Heap によるボルディズム群を用いた解釈をレベル 2 写像類群の場合に翻訳し、レベル 2 写像類群のアーベル化の不変量を新しく大量かつ組織的に定義し、 pin^- 構造のブラウン不変量を用いてそれらの明快な記述を与えた。佐藤によってはじめてボルディズム不変量の組織的な計算が実行されたことになる。なおブラウン不変量はテータ函数とも深く関係している。これにより下からの評価が得られる。他方、J. Mennicke, H. Bass, J. Milnor および J.P. Serre による斜行群の合同部分群についての結果と D. Johnson によるトレリ群の結果を組み合わせ下からの評価を与え、以上を合わせてレベル 2 写像類群のアーベル化が決定された。このアーベル化はブラウン不変量を用いて完全に記述される。奇数レベルの場合と様相が全く異なり、曲面の $\mathbb{Z}/2$ ホモロジー群の $\mathbb{Z}/8$ に係数をもつ群環の商となっている。

論文提出者 佐藤正寿は三つの参考論文を提出している。まず第一の論文は球面上の分岐被覆の族の符号数が局所化することを位相幾何学的に証明したものである。古田幹雄が微分幾何学的に行ったものを位相幾何学に翻案したのであるが、写像類群のみならず 4 次元トポロジーにおいても価値のある仕事である。第二の論文は本論文の先駆けとも言える結果であって、二重不分岐被覆の写像類群のアーベル化を決定したものである。ランタン関係式を巧妙に使って上からの評価を行い、Schottky テータ函数のテータ・マルチプライアを使って下からの評価を行っている。ここにもリーマン面の深いトポロジーが姿を現している。第三の論文は曲面をファイバーとするファイバー束の符号数に関連して、写像類群の全く新しい類函数を発見したものであり高い独創性をもつ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

いうまでもなく、本論文には、レベルつき写像類群のアーベル化の決定という基本的な問題に、ほぼ最終的な解決を与えたという画期的な意義がある。それだけでなく、はじめて写像類群のボルディズム不変量の有効性を示したことにより、今後の写像類群のホモロジー的研究に新生面を切り開いたといえる。また、参考論文も今後の当該分野の研究に多大の示唆を与えるものである。これらの論文の数理科学の発展に寄与するところは大きい。

よって、論文提出者 佐藤 正寿 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。