論文の内容の要旨

論文題目　On the index problem for C^1-generic wild homoclinic classes
（C^1 通有的に野性的なホモクリニック類の指数問題について）

氏名　篠原　克寿

M を滑らかな閉リーマン多様体とし，その C^1 微分同相群を $\mathrm{Diff}^1(M)$ で表し，C^1 位相を導入する．P を $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の双曲型周期点，つまり線形写像 $df^{\mathrm{per}(P)}(P)$ （$\mathrm{per}(P)$ は P の周期）が絶対値 1 の固有値を持たないような周期点とする．このとき,（不）安定多様体定理により，P の安定多様体 $W^s(P, f)$，不安定多様体 $W^u(P, f)$ が定義される．$W^u(P, f)$ の次元を P の指数といい，$\mathrm{ind}(P)$ と表す.

P に対し，$W^s(P, f)$, $W^u(P, f)$ が横断的に交わる点の集合の閉包を P の ホモクリニック類 (homoclinic class) といい，$H(P, f)$ で表す．$H(P, f)$ は双曲型周期点が稠密であり，位相推移的であることが知られている．双曲型力学系（ノーサイクル条件を満たす公理 A 微分力学系）の研究において，ホモクリニック類は上のような性質から重要な役割を果たしてきた．そして，この集合が非双曲型力学系の研究においても重要であることがいくつかの研究を通じて示唆されている.

双曲型力学系では，ホモクリニック類は一様双曲性 (uniform hyperbolicity) と呼ばれる性質を持つことが分かり，これを用いてその上の力学系をかなり繊細なレベルまで調べることができる．一方，非双曲型力学系では，ホモクリニック類は一様双曲性を持つとは限らない．一様双曲性を持たないホモクリニック類は，部分双曲性 (partial hyperbolicity) や優越分解 (dominated splitting) などの弱い双曲性が見られる場合もあるが，こ

れらの弱い双曲性すら許容しない，野性的 (wild) と呼ばれるホモクリニック類が存在し，それらは非常に複雑な軌道のふるまいを示すことが知られている．

これらのホモクリニック類において，どのような仕組みでその双曲性が失われているのか，というのは興味深い問題である．本論文はこのような問題意識に基づいて，野性的ホモクリニック類の中の周期点の指数について，C^1 通有的 (generic) な観点から研究したものである．

正確に問題を述べるために，いくつかの定義を準備する．

定義 1. $\Lambda \subset M$ を f - 不変集合，つまり，$f(\Lambda) = \Lambda$ であるような集合とする．Λ が優越分解を許容するとは，正整数 l，および $TM|_\Lambda$ の非自明な f - 不変部分束 F, G で $TM|_\Lambda = F \oplus G$ となるものが存在し，任意の $x \in \Lambda$ に対して，不等式

$$\|df^l(x)|_F\| \|(df)^{-l}(f^l(x))|_G\| < 1/2,$$

が成立することである．ここで $\|\ \cdot\ \|$ はリーマン計量から定まる作用素ノルムである．

定義 2. $\Lambda \subset M$ を f - 不変集合とする．Λ の指数集合 $\mathrm{ind}(\Lambda)$ を，Λ に属する双曲型周期点の指数の集合と定義する．すなわち，

$$\mathrm{ind}(\Lambda) := \{\, \mathrm{ind}(p) \in \mathbb{N} \mid p \in \mathrm{Per}_h(f) \cap \Lambda \,\}$$

とする．ここで，$\mathrm{Per}_h(f)$ は f の双曲型周期点の集合を表す．

定義 3. ホモクリニック類 $H(P, f)$ が野性的であるとは，$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の近傍 $\mathcal{U}$ が存在して，任意の $g \in \mathcal{U}$ について $P(g)$ のホモクリニック類 $H(P, g)$ が優越分解を許容しないことをいう．ここで，$P(g)$ は P の g に対する接続を表す．

本論文では以下のような問題を取り扱った．

問題 1. C^1 通有的な微分同相写像 f に対して，$H(P, f)$ が野性的であるとき，$\mathrm{ind}(H(P, f))$ についてどのようなことが言えるか？

この問題の重要性は例えば以下のような点にある．今までに野性的ホモクリニック類の具体的な例がいくつか与えられている．それらの例は異次元ヘテロクリニックサイクル (heterodimensional cycle) と呼ばれる構造を持つ力学系から，その中の周期点を，微分写像が複素固有値を持つように分岐させる，という手法により構成されてきた．この議論の要は，ホモクリニック類の中に指数の異なる周期点があるというところにあるのだが，これ以外に野性的ホモクリニック類が発生する機構が存在するかどうか，というのは自然な問いである．この問いは，問題 1 の特殊な場合である，次の問題に言い換えることができる．

問題 2. C^1 通有的な微分同相写像 f に対して，$H(P,f)$ が野性的であるとき，$\#\,\mathrm{ind}(H(P,f)) \geq 2$ か？

この問題に対し，3 次元多様体上の野性的ホモクリニック類に関して次の結果を得た．以下の定理で，周期点 P が体積拡大的（体積縮小的）であるとは $|\det(df^{\mathrm{per}(P)}(P))| > 1$ (< 1) が成立することである．

定理 1 (Theoerm 1)**.** 任意の滑らかな 3 次元閉リーマン多様体 M に対し，$\mathrm{Diff}^1(M)$ の残留集合 (residual set) $\mathcal{R}$ が存在して，次が成立する：$f \in \mathcal{R}$ が野性的なホモクリニック類 $H(P,f)$ を持ち，かつ体積拡大的な周期点 $Q \in H(P,f)$ が存在するならば $2 \in \mathrm{ind}(H(P,f))$ である．

この定理の系として，次を得る．

系 (Corollary)**.** M は定理 1 と同様とする．$\mathrm{Diff}^1(M)$ の残留集合 $\mathcal{R}$ が存在して，次が成立する：$f \in \mathcal{R}$ が野性的なホモクリニック類 $H(P,f)$ を持ち，かつ体積拡大的な周期点 $Q \in H(P,f)$ と体積縮小的な周期点 $R \in H(P,f)$ が存在するならば $\mathrm{ind}(H(P,f)) = \{1,2\}$ である．

問題 2 が肯定的であるならば，この系における体積拡大的，縮小的な周期点の存在の仮定は不要であるのだが，現段階ではこの間の溝を埋められていない．

定理 1 の背景にある考え方は次のようなものである．ホモクリニック類が野性的であることから，微分写像の拡大方向があらゆる方向へと「飛散」する．それゆえ，この飛散する双曲性をうまくまとめることにより，望んだ指数をもつ双曲型周期点を作ることができる．

この考え方に基いて同様の問題を高次元で考えた場合，野性的なホモクリニック類の指数集合は「大きな」集合になると推測できる．本論文では，このようなが推測が一般には適当ではないこと示す例を与えた．正確に述べると，次の結果を示した．

定理 2 (Theorem 3)**.** 任意の滑らかな 4 次元閉リーマン多様体 M に対し，$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$，$P \in \mathrm{Per}_h(f)$, f の開近傍 $\mathcal{U}$，および $\mathcal{U}$ の残留集合 $\mathcal{R}$ が存在して，次が成立する：

1. $g \in \mathcal{R}$ ならば，$H(P,g)$ は優越分解を許容しない．
2. $\mathrm{ind}(H(P,g)) = \{2,3\}$.

以下で定理 1, 2 の証明について，その概要を述べる．

定理 1 の証明は二つの部分に分けられる．まず「ホモクリニック類が優越分解を許容しない」という線形代数的な情報から，微分のふるまいが非双曲的である周期点を見つけ出し，その周期点に沿って C^1 微小摂動を

加え，退化したホモクリニック接触 (homoclinic tangency) を持つ周期点を作る．次に，このホモクリニック接触の分岐を通じて，もとのホモクリニック類の中で異次元ヘテロクリニックサイクルを作る．

前半で難しいのは以下の点である．たとえ摂動を加えることでホモクリニック接触が形成できたとしても，一般にはこの摂動により，作られたホモクリニック接触がもとのホモクリニック類の外部に出てしまう可能性がある．このような事態が起こらないことを保障するため,（不）安定多様体をなるべく動かさないよう注意深く摂動を行わなければならない．

後半では，摂動により形成されたホモクリニック接触を直接調べるのではなく，いくつかの摂動を与えることにより，本質的にはアフィン力学系を調べることに帰着させ，その分岐を調べる．

次に定理 2 の証明について述べる．定理で主張されているようなホモクリニック類の例を作るためには，次の二点を保障する必要がある．一つはそのホモクリニック類が優越分解を許容しないこと，もう一つはそのホモクリニック類が指数 1 の周期点を含まないことである．

前者については，従来どおりのテクニックを用いる．すなわち，微分が複素固有値をもつような異次元ヘテロクリニックサイクルを利用する．後者の条件を保障するために，このホモクリニック類の周辺では任意の点の接空間のある 2 次元部分空間が，微分写像によりその体積が十分に拡大されるようにしておく．すると，任意の点の接空間の任意の 3 次元部分空間は体積拡大的となり，このホモクリニック類に属する周期点が指数 1 を持たないことが分かる．さらに，ホモクリニック類の爆発（摂動により急激に大きくなること）が起きないことを保障するために，このホモクリニック類の周囲の大域的なふるまいを制限しておくことで，上に述べた性質が C^1 微小摂動で保たれることが分かり，所望の例が完成する．