

論文審査の結果の要旨

氏名 篠原克寿

論文提出者篠原克寿は、本論文において3次元閉リーマン多様体上の C^1 級微分同相写像の野性的ホモクリニック類の指数問題に関して、新しい **generic property** を証明し、さらに4次元閉リーマン多様体上では3次元の結果と反対の方向の例を与えた。

ホモクリニック類は位相推移性を持つコンパクト不変集合であり **generic** には鎖回帰類と一致することにより、多様体上の大域的なダイナミクスを理解するための基本単位である。したがって、**generic** な観点からホモクリニック類を調べることは、微分同相写像の空間を大域的に理解することにつながる。双曲型微分同相写像の場合には、鎖回帰集合は双曲型分解を持ち、有限個の双曲型ホモクリニック類に分解され、**Markov** 分割を許容するため、そのダイナミクスは理解可能である。ホモクリニック類が双曲型分解を弱めた優越分解を持つ場合にも双曲型に準ずる性質を持ち、ある程度の理解が可能である。一方で、ホモクリニック類がいかなるタイプの優越分解も持たない場合は扱いが困難であるが、さらに **generic** な観点からは、微分同相写像の微小摂動も含めていかなるタイプの優越分解も持たないホモクリニック類を理解する必要がある。そのようなホモクリニック類は野性的ホモクリニック類と呼ばれる。

本論文では、野性的ホモクリニック類についての指数問題を扱い、3次元の場合は、ある条件下（体積拡大双曲型周期点と体積縮小双曲型周期点を含むとき）において、指数集合が（可能な指数はすべて現れるという意味で）完全であることを証明した。ここで、指数集合とはそのホモクリニック類に属する双曲型周期点の不安定多様体の次元の集合である。指数問題については、2007年に **Abdenur, Bonnati, Crovisier, Diaz, Wen** の共著論文において、「**generic** にはすべての鎖回帰集合の指数集合は（自然数の集合における）区間になるか？」という問題を提出している。ホモクリニック類は鎖回帰集合であるため、上記の結果はこの問題の部分的な解決と考えることも出来る。さらに、その証明にいたる途中の結果として、ある微分同相写像が指数1の体積拡大双曲型周期点

を含む野性的ホモクリニック類を持つとき、その微分同相写像は、いかなる微小摂動によっても異次元ヘテロクリニック・サイクルが存在するような微分同相写像で近似できるという結果を用いる。この結果自体も、非双曲性と異次元ヘテロクリニック・サイクルを関連させる Bonatti と Diaz による最近の予想を支持する結果になっている。このように、特別な場合のある条件下における結果ではあるが、扱い困難な対象に対して、指数問題をあるアフィン力学系に対して異次元ヘテロクリニック・サイクルを微小摂動によりつくることに帰着させた本論文の議論は、この分野における高度な理解を必要とし、定理の主張を生み出した問題意識も含めて、価値あるものである。

4次元の結果については、本論文の Appendix に書かれているが、次に述べる理由により高い評価を与えられる。ホモクリニック類がいかなるタイプの優越分解も持たないということは、いかなる方向にも微分の縮小拡大に関する強弱が一様には存在しないため、その縮小拡大をうまく配合することにより、指定された指数を持つ双曲型周期点を微小摂動によりつくることができると考えるのは自然な考え方である。実際に、上記3次元の結果はその考え方による結果である。それに対し4次元で構成した例は、いかなるタイプの優越分解を持たないにもかかわらず、指数1を持つ双曲型周期点が微小摂動も含めて生じない例になっているため、この考え方に反する結果である。その手法は、指数3の周期点と指数2の周期点の間の異次元ヘテロクリニック・サイクルを次のような環境でつくることで、この2つの周期点を含む鎖回帰類をつくり、それが generic にはホモクリニック類と一致するというものである。その環境とは、指数3の周期点の中心方向と指数2の周期点の拡大方向と縮小方向に(実数でない)複素固有値を持たせることで優越分解の存在を排除し、その一方で微分が各点における接空間のすべての3次元体積を拡大するようにとることで指数1の周期点の存在を排除するというものである。このように比較的シンプルなアイデアでありながら、構成された例は専門家の予想に反するものになっているという点で、意外性を含む興味深い結果である。

非双曲型力学系の大域的理解を目指し、その基本単位であるホモクリニック類の指数問題において新たな知見を与えた本論文の意義は大きく、論文提出者篠原克寿は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があるものと認める。