論文の内容の要旨

論文題目：Nevanlinna theory for holomorphic mappings and related problems
(和訳： 正則写像のネヴァンリンナ理論と関連する問題)

氏名： Si Duc Quang

本論文では高次元ネヴァンリンナ理論を論じる。ネヴァンリンナ理論では、第一・第二主要定理と呼ばれる基本定理がある。高次元ネヴァンリンナ理論では、因子に対する交点理論がまず問題となる。因子に対しては第一主要定理が既に成立され、第二主要定理を確立することが問題となっている。

本論文では、有理型写像のネヴァンリンナ理論を研究し、新しい結果として第二主要定理または類似の評価式を以下の三つの場合に証明する：(i) 複素射影空間への有理型写像、(ii) 関数体上の正則曲線、(iii) 穴あき円板から準アーベル多様体への正則曲線。これらの第二主要定理を証明した後、それらの応用について考察する。

本論文は、全体で５章から構成される。第１章では、有理型関数とコンパクト複素多様体への有理型写像のネヴァンリンナ理論の概要と第一主要定理を述べる。第２章と第３章では、複素射影空間への有理型写像の第二主要定理と関数体上の Cartan-Nochka 定理について考察し、これ等を動く因子の場合に拡張する。第４章では、準アーベル多様体への正則曲線の第二主要定理を示す。最後の第５章では、第２・３章の結果の応用を二つ与える。

以下、各章の内容について説明する。

第１章では、有理型関数についての基本事項とこれまでに知られている結果、及び因子に対する第一主要定理について述べる。

第２章では、動く因子に対する打ち切り個数関数による第二主要定理型の不等式を考察する。最近, M. Ru-J. Wang (2004) は、動く因子に対する打ち切り個数関数による第二主要定理型の不等式を証明した。この結果を改良し、次の定理を証明する (参照 Chapter 2, Theorem 16)。

定理 16 ([ThQ08], Theorem 1). $f:\mathbf{C}^m\to\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を有理型写像とする。$\mathcal{A}=\{a_1,...,a_q\}$ を $\mathbf{C}^m$ から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の双対空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})^*$ への有理型写像 a_i の族で $(f,a_i)\not\equiv 0$ $(1\leqslant i\leqslant q)$ をみたすものとする。さらに、$q\geqslant n+2$ とし $\mathcal{A}$ はある非退化条件を満たすと仮定する。すると、

$$|| \quad cT_f(r)\leqslant\sum_{i=1}^{q}N_n(r,\mathrm{div}(f,a_i))+O\big(\max_{1\leqslant i\leqslant q}T_{a_i}(r)\big)+O\big(\log^+T_f(r)\big)$$

が $c=1$ で成立する。

注. Ru-Wang は、$c=1/n(2n-1)$ で示していた。

次に、複素射影空間の場合の Cartan-Nochka の定理の拡張を考える。本論文では、以

下のように動く超平面に対する打ち切り個数関数による Cartan-Nochka 型の第二主要定理を証明する (参照 Chapter 2, Theorem 25)。

定理 25 ([ThQ10], Theorem 3.5). $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を有理型写像とする。$\{a_i\}_{i=1}^q$ を双対射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})^*$ への有理型写像族で、N 準一般の位置にあり、a_i は f に対し位数関数の増大度が小さいものとする。更に、f は、$\mathbf{C}(\{a_i\}_{i=1}^q)$ 上線形非退化と仮定する。このとき、任意の $0 < \epsilon < 1$ に対し

$$|| \quad (q - 2N + n - 1 - \epsilon)T_f(r) \leqslant \sum_{i=1}^{q} N_{(n+1)P(\epsilon,qN)-1}(r, \operatorname{div}(f, a_i)) + o(T_f(r)).$$

ここで、$\mathbf{C}(\{a_i\}_{i=1}^q)$ は、各 a_i の成分の比をとり、それら全てから $\mathbf{C}$ 上生成される $\mathbf{C}^m$ 上の関数体を表す。

注. 定数 $P(\epsilon, k)$ は、$P(\epsilon,k) \leqslant \left[(1+\epsilon)^{\left[\frac{k}{\log^2(1+\epsilon)}\right]+1}\right]$ を満たすようにとれる。

第 3 章では、関数体上の Cartan-Nochka 定理を扱う。J. Wang (1995)、J. Noguchi (1996) 等は関数体上の Cartan-Nochka 定理を証明した。ここでは、これを動く因子の場合に拡張する。

$\mathbf{k}$ を標数 0 の代数閉体とし（ここでは簡単のため $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ と仮定する)、R を $\mathbf{k}$ 上の非特異 N 次元射影代数多様体とする。K で R 上の有理関数体を表す。R 上の Hodge 計量形式 ω を一つとり固定する。$(a_0, \cdots, a_m)$ $(a_j \in K, j = 0, \cdots, m)$ の ω に対する（射影的）高さを $\operatorname{ht}((a_j); \omega)$ で表す。

$a_j \in K, j = 0, \cdots, m$ を全てが 0 ではないものとする。今 $a_0 \neq 0$ と仮定する。以下のように R 上の因子を定義する

$$((a_j))_\infty = -\min\left\{\operatorname{div}\left(\frac{a_j}{a_0}\right); 0 \leqslant j \leqslant m\right\}.$$

$L \to R$ で因子 $((a_j))_\infty$ によって決まる R 上の直線束を表す。本論文では、次の打ち切りの個数関数による第二主要定理を証明する (参照 Chapter 3, Theorem 31)。

定理 31 ([ThQ10], Theorem 4.2). $f = (\sigma_0 : \cdots : \sigma_m) : R \to \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ を $\sigma_j \in \Gamma(R, L)$ で与えられる有理写像とする。$q \geqslant m+2$ とし $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_q\} \subset (K^*)^{m+1}$ を非退化有限族とする。f を $\mathbf{C}(\mathcal{B})$ 上線形非退化と仮定する。即ち、任意の $c = (c_0, \ldots, c_m) \in (\mathbf{C}(\mathcal{B}))^{m+1} \setminus \{0\}$ に対し $(f, c) = \sum_{i=0}^m c_i \sigma_i \neq 0$. すると

$$\begin{aligned}\operatorname{ht}(f;\omega) \leqslant \sum_{i=1}^{q} N_m(\operatorname{div}(f, b_i); \omega) + \frac{m(m+1)}{2} N(J; \omega)\\ + qN(\nu_1; \omega) + 2(q-1)N(\nu_2; \omega).\end{aligned}$$

ここで、ν_1 と ν_2 は以下のとおりに定義されるものである：

$$\nu_1 = \max\left\{\operatorname{div}\det\left(b_{i_s j_t}\right)_{1\leqslant s,t\leqslant h} | 1 \leqslant h \leqslant m+1, \det\left(b_{i_s j_t}\right)_{1\leqslant s,t\leqslant h} \neq 0\right\},$$

$$\nu_2 = \min\left\{\operatorname{div}\det\left(b_{i_s j_t}\right)_{1\leqslant s,t\leqslant h} | 1 \leqslant h \leqslant m+1, \det\left(b_{i_s j_t}\right)_{1\leqslant s,t\leqslant h} \neq 0\right\}.$$

第4章では準アーベル多様体への正則曲線の孤立特異点での振る舞いをネヴァンリンナ理論として定量的に調べる。2002年と2008年の二つの論文でJ. Noguchi-J. Wikelmann-K. Yamanoiは、準アーベル多様体Mへの正則曲線$f: \mathbf{C} \to M$とM上の代数的因子Dに対して、打ち切りレベル1の個数関数による第二主定理を証明した。本論文では、穴空き円板$\Delta^* \subset \mathbf{C}$から準アーベル多様体$M$への正則曲線の場合を調べる。以下の定理を得る(参照 Chapter 4, Theorem 42)。

定理42. $f: \Delta^* \to M$を準アーベル多様体Mへの代数非退化正則曲線とし、DをM上の代数的被約因子とする。このとき、Mの非特異同変コンパクト化$\bar{M}$が、fに依らずに(Dには依る)存在し、ある自然数k_0をもって

$$\| \quad T_f(r; c_1(\overline{D})) = N_{k_0}(r, f^*D) + O(\log^+ T_f(r; c_1(\overline{D}))) + O(\log r).$$

が成立する。

定理42の応用として次のPicardの大定理型の結果を得る(参照 Chapter 4, Theorem 43).

定理43. 定理42において$f: \Delta^* \to M$を代数非退化正則曲線とし、$\mathrm{St}(D) = \{x \in M; x + D = D\}^0 = \{0\}$と仮定する。このとき、$f(\Delta^*) \cap D = \emptyset$ならば、$f$は$\Delta$から$\bar{M}$への正則曲線に解析接続される。

注. この定理は、Dethloff-Lu (2001)によりFinsler計量の負曲率法によって証明されている。ここでは、ネヴァンリンナ理論による別の証明を与える。

最後の第5章では、応用について研究した結果を述べる。まず初めに有理型写像の一意性問題を扱い、次のような一意性定理を得た(参照 Chapter 5, Therorem 48)。

定理48 ([QT08A], Lemma 1). $f, g: \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$を2つの線形非退化有理型写像とし、$\{H_i\}_{i=1}^q$を一般の位置にある$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$の超平面で

$$\dim\left(f^{-1}(H_i) \cap f^{-1}(H_j)\right) \leqslant 2, \ 1 \leqslant i < j \leqslant q$$

を満たすものとする。$q > \dfrac{\sqrt{17n^2+16n}+3n+4}{4}$とし

(i) $\min\{\mathrm{div}(f, H_i)(z), n\} = \min\{\mathrm{div}(g, H_i)(z), n\}, \forall i \in \{1, \cdots, q\}$,

(ii) $df(z) = dg(z), \forall z \in \cup_{i=1}^q f^{-1}(H_i) \setminus (I(f) \cup I(g))$,

を仮定する。すると$f \equiv g$.

次に有理型写像族の正規性問題について考える。Dを$\mathbf{C}^m$の領域とし、$f: D \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$を有理型写像とする。$D$内の開集合$V$上で、$f$が被約表現$f = (f_0 : \cdots : f_n)$を持つとき、簡単の為に$\tilde{f} = (f_0, \cdots, f_n): V \to \mathbf{C}^{n+1}$も$V$上の$f$の被約表現と呼ぶこととする。$D$から$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$への有理型写像の列$\{f_k\}_{k=1}^\infty$が$D$上有理型収束するとは、任意の点$z \in D$に近傍$U_z$と$f_k$の$U_z$上の被約表現$\tilde{f}_k = (f_{k1}, \cdots, f_{kn})$があって、全ての$\{f_{kj}\}_{k=1}^\infty$が$U_z$上広義一様収束することとする。

定理68 ([QT08B], Theorem 1.4). $\mathcal{F}$をDから$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$への有理型写像族とし、$Q_1, \cdots, Q_q$ ($q \geqslant 2n+1$)を一般の位置にある動く超曲面とする。次を仮定する。

(i) D の任意のコンパクトな部分集合 K に対し $f \in \mathcal{F}$ による重複度を込めた因子としての引き戻し $f^*(Q_j) \cap K (1 \leqslant j \leqslant n+1)$ の $2(m-1)$ 次元 Lebesgue 測度は一様有界である。

(ii) D の任意のコンパクトな部分集合 K に対し $f \in \mathcal{F}$ による引き戻しの台について、$f^{-1}(Q_j) \cap K$ $(n+2 \leqslant j \leqslant q)$ の $2(m-1)$ 次元 Lebesgue 測度は一様有界である。

すると $\mathcal{F}$ は、D 上の有理型正規族（有理型収束に関する正規族）である。

定理 70 ([QT08B], Theorem 1.5). $\mathcal{F}$ を D から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への正則写像の族とし、$Q_0, \cdots, Q_n$ を D の各点で一般の位置にある $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の動く超曲面で、共通次数 $d \geqslant 1$ であるとする。$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ にある動く超曲面 $L_1, \cdots, L_n$ を $L_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} Q_j^p$ と定義する。ただし $p > n(n+1)$ は固定され、a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant n)$ は D 上の正則関数で行列 (a_{ij}) に含まれる任意の正方部分行列の行列式は D の各点で 0 を取らないと仮定する。$m_1, \cdots, m_n$ を自然数または ∞ とし、次の条件を満たすものとする。

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} < \frac{(p-n(n+1))d}{np}.$$

このとき、任意の $f \in \mathcal{F}$ と任意の L_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ に対し $f^*(L_i) \geqslant m_i \cdot \operatorname{Supp} f^*(L_i)$ が成立するならば、$\mathcal{F}$ は正規族をなす。

定理 71 (Theorem 1.6, [QT08B]). $\mathcal{F}$ を D から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への有理型写像の族とし、$Q_0, \cdots, Q_n$ を共通次数 $d \geqslant 1$ の一般の位置にある動く超曲面とする。$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の動く超曲面 $L_1, \cdots, L_n$ を $L_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} Q_j^p$ と与える．ただし自然数 $p > n(n+1)$ とし、a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant n)$ は D 上の正則関数で、行列 (a_{ij}) に含まれる任意の正方部分行列の行列式は、D 上恒等的に 0 ではないと仮定する。D の任意に固定されたコンパクト部分集合 K に対し、$f^*(L_j) \cap K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ と $f^*(Q_0) \cap K$ の $2(m-1)$ 次元 Lebesgue 測度は $f \in \mathcal{F}$ に関して一様有界であるとすると、$\mathcal{F}$ は有理型正規族である。

参考文献

[QT08A] S. D. Quang and T. V. Tan, *Uniqueness problem of meromorphic mappings with few hyperplanes*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska **62** (2008), 123-142.

[QT08B] S. D. Quang and T. V. Tan, *Normal family of meromorphic mappings of several complex variables into* $\mathbf{C}P^n$ *for moving hypersurfaces*, Ann. Polon. Math. **94** (2008), 97-110.

[ThQ08] D. D. Thai and S. D. Quang, *Second main theorem with truncated counting function in several complex variables for moving targets*, Forum Math. **20** (2008), no. 1, 163–179.

[ThQ10] D. D. Thai and S. D. Quang, *Cartan-Nochka theorem with truncated counting functions for moving targets*, Tò appear in Acta Math. Vietnamica **35** (2010), 1-25.