審査の結果の要旨

氏　名：Si Duc Quang

ネヴァンリンナ理論は、ピカールの定理に初等的かつ定量的観点からの証明を与えることを目的として創始され（1925）、より広い観点から解析関数や有理型写像を解析することを目的とする理論あるいは解析手法である。1 次元及び同次元 (微分非退化) 写像の場合は、概ね 1970 年代に完了した。しかし非同次元の場合はまだ一般論は完成されていない。当該論文で扱っているのはこの場合である。

正則写像または有理型写像 f が与えられたとき、ネヴァンリンナ理論では f の値域での振る舞いを調べるためにある類に属する因子（より一般的にはサイクル）D がとられる。その類に対し定量的不変量として位数関数（特性関数）$T_f(r)$ が定義され、D に対し交点を数え上げる打ち切り個数関数 $N_k(r, f^*D)$ $(k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\})$ 及び接近関数 $m_f(r, D)$ が定義される。ネヴァンリンナの第一主要定理とは、関係式 $T_f(r) = N_k(r, f^*D) + m_f(r, D) + O(1)(r \to \infty)$ のことであり、既に確立されている。これより、$N_\infty(r, f^*D) < T_f(r) + O(1)$ が従う。一方複数の D_i を用いて逆の評価式 $CT_f(r) < \sum_i N_k(r, f^*D_i) + \text{small term}$ （$C > 0$, 定数）が第二主要定理でこれは限られた場合しか確立されていず、困難な問題として残っている。これが一般的に解決されれば、Kobayashi 予想、Green-Griffiths 予想などが従うことが知られている。

本論文は、この問題についていくつかの新しい知見を与えている。即ち、第二主要定理または類似の評価式を以下の三つの場合に証明する：(i) 複素射影空間への有理型写像、(ii) 関数体上の正則曲線、(iii) 穴あき円板から準アーベル多様体への正則曲線。第 1 章では、有理型関数とコンパクト複素多様体への有理型写像のネヴァンリンナ理論の概要と第一主要定理を述べる。第 2 章と第 3 章では、複素射影空間への有理型写像の第二主要定理と関数体上の Cartan-Nochka 定理について考察し、これ等を動く因子の場合に拡張する。動く因子を扱う問題は、歴史的にはネヴァンリンナより古く E. ボレル (1897) からの問題である。第 2 章では、動く因子に対する打ち切り個数関数による第二主要定理型の不等式を考察する。Ru-Wang (2004) は、動く因子に対する打ち切り個数関数による第二主要定理型の不等式を証明した（以下の評価式で、$c = 1/n(2n-1)$ の場合）。この結果を改良し、次の定理を証明する。

定理 A. $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を有理型写像とする。$\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_q\}$ を $\mathbf{C}^m$ から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の双対空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})^*$ への有理型写像 a_i の族で $(f, a_i) \not\equiv 0$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$ をみたすものとする。さらに、$q \geqslant n+2$ とし $\mathcal{A}$ はある非退化条件を満たすと仮定する。すると、

$$|| \quad cT_f(r) \leqslant \sum_{i=1}^{q} N_n(r, \operatorname{div}(f, a_i)) + O\Big(\max_{1 \leqslant i \leqslant q} T_{a_i}(r)\Big) + O\Big(\log^+ T_f(r)\Big)$$

が $c = 1$ で成立する。

さらに、動く超平面に対する打ち切り個数関数による Cartan-Nochka 型の第二主要定理を証明する。

定理 B. $\{a_i\}_{i=1}^q$ を双対射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})^*$ への有理型写像族で、N 準一般の位置にあり、a_i は f に対し位数関数の増大度が小さいものとする。有理型写像 $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ は、$\mathbf{C}(\{a_i\}_{i=1}^q)$ 上線形非退化と仮定する。このとき、任意の $0 < \epsilon < 1$ に対し

$$|| \quad (q - 2N + n - 1 - \epsilon)T_f(r) \leqslant \sum_{i=1}^{q} N_{(n+1)P(\epsilon,qN)-1}(r, \mathrm{div}(f, a_i)) + o(T_f(r)).$$

ここでは、定数 $P(\epsilon, qN)$ が、大きくはあるが計算可能な形で求まった点が重要である。(これを ∞ とした先行結果は、既にある。)

第 3 章では、$\mathbf{C}$ 上の代数関数体上類似を考え、上記定理 A の関数体上の類似を示した。

第 4 章では、穴あき円板 Δ^* から準アーベル多様体 A への正則曲線を扱う。Noguchi-Winkelmann-Yamanoi (2002/08) は、準アーベル多様体 A への正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ と A 上の代数的因子 D に対して、打ち切りレベル 1 の個数関数による第二主定理を証明した。ここでは、定義域を Δ^* にとり次の定理を得た。

定理 C. $f : \Delta^* \to A$ を代数非退化正則曲線とし、D を A 上の代数的被約因子とする。このとき、A の非特異同変コンパクト化 $\bar{A}$ が、f に依らずに（D には依る）存在し、ある自然数 k_0 をもって

$$|| \quad T_f(r; c_1(\bar{D})) = N_{k_0}(r, f^*D) + o(T_f(r; c_1(\bar{D})).$$

定理 D の応用として Dethloff-Lu による Picard の大定理型の結果 (2001) の別証が得られる。

第 5 章では、第 2・3 章の結果の応用として、$\mathbf{C}^m$ から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への有理型写像の一意性の問題、及び $\mathbf{C}^m$ の領域から $\mathbf{P}^n((\mathbf{C}))$ への有理型写像族の有理型正規族（H. Fujimoto による概念) になる為の十分条件について興味深い新結果を得た。

以上を要するに本論文は、多変数複素解析学における高次元ネヴァンリンナ理論を扱い、得られた結果は数理科学上貢献するところ大きく、よって論文提出者 Si Duc Quang は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があるものと認める。