# 論文の内容の要旨

2010 年 1 月 5 日

## 論文題目

**Elementary computation of ramified components of Jacobi sum Hecke characters**
（ヤコビ和量指標の分岐成分の初等的な計算）

## 氏名: 津嶋　貴弘

## 要旨本文

有理数体上の代数多様体がある有限素点で順滑モデルを持たない時、悪い還元を持つという。悪い還元の場合には、良いモデルの代わりに、安定モデルを考えたい。安定モデルとは、特殊ファイバーの特異点が高々通常二重点であり、特殊ファイバーの既約成分の中に $\mathbb{P}^1$ がある時には、他の既約成分と三点以上で交わっているもののことをいう。$K$ を局所体とし、$X$ を $K$ 上の順滑かつ固有で幾何的に連結な曲線とする。Deligne-Mumford の定理により、$X$ の種数が 2 以上ならば、$X_{K'}$ が唯一つの安定モデルを有するような有限次拡大体 $K'/K$ が存在する、ということがわかる。この定理により、安定モデルの存在はわかっているのだが、具体的に曲線を考えると、その安定モデルを見付けることは容易ではない。1988 年に Coleman-McCallum は、剛幾何 (Rigid Geometry) を使ってフェルマー曲線の商の安定モデルを計算し、系としてヤコビ和量指標の分岐成分を明示的に計算した。代数的ヘッケ指標は、各素数 $l$ について一次元 $l$ 進表現を誘導すること

が知られている。ヴェイユの研究により、ある種のヤコビ和は、代数的ヘッケ指標と見なせる事がわかっている。それをヤコビ和量指標と呼ぶ。以下、どのようなヤコビ和を考えるか、述べる。

$a, b, c$ を整数とし、$a+b+c=0$ を充たすとする。$m$ を正の整数とする。$K=\mathbb{Q}(\mu_m)$ とおく。$\mathfrak{p}$ を $K$ の素点とし、剰余体 $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ の標数を $p$ とする。今、$(p, m)=1$ とする。$(\frac{\ }{\mathfrak{p}})_m : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mu_m$ を $m$ 乗剰余記号とする。以上の記号の下で、次のヤコビ和を考える。

$$J_{a,b,c}^{(m)}(\mathfrak{p}) = -\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_m^c \sum_{x \in \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} \left(\frac{x}{\mathfrak{p}}\right)_m^a \left(\frac{1-x}{\mathfrak{p}}\right)_m^b .$$

1952 年にヴェイユは、このヤコビ和がヘッケ量指標と見なせる事を示した。以下、ヤコビ和量指標といった場合、このヤコビ和に付随する量指標を意味するものとする。ヤコビ和量指標が定める $l$ 進表現は、以下のような $K$ のガロワ群の指標になっている。

$$G_K^{ab} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}^{\times}.$$

この指標は、$ml$ と素な $K$ の素点では不分岐であり、$m$ を割る素点では分岐している。

上述の Coleman-McCallum の結果は、この $m$ を割る素点での指標の様子、即ち、分岐成分を明示的に決定したものである。ヤコビ和量指標が誘導する $l$ 進表現は、フェルマー曲線のエタール・コホモロジー $H^1$ へのガロワ作用によって実現されることがわかる。上記の Coleman-McCallum の結果に対し、私はフェルマー曲線の準安定モデルも、剛幾何も使わない初等的、かつ簡明な証明を発見した。この証明は、昨今の斎藤毅氏と A. Abbes 氏による分岐理論の研究に触発されて成された。

以下、主定理を述べる。$m$ を正の整数とする。$p$ を素数として、$m=p^n m', (p, m')=1, n \geq 1$ とかく。$a, b, c$ を $a+b+c=0$ をみたす整数とする。$a=p^r a', (p, a')=1$ とおく。以下 $(m, a, b, c)=1$, $(p, b)=1, (p, c)=1$, $n \geq r \geq 0$ を仮定する。更に、$K=\mathbb{Q}_p(\mu_m)$ とおく。1 の原始 $p$ 乗根 $\zeta \in K$ を固定する。それに付随して $\pi \in K$ を $\pi^{p-1}=-p, \frac{\pi}{1-\zeta} \equiv 1 \pmod{\pi}$ をみたす元とする。

次に、$l \neq p$ を素数とする。 以下、埋め込み $K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$ を固定する。この埋め込みから誘導される非自明な指標を $\chi : \mu_m(K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ とかく。更に、指標 $\psi_0 : \mathbb{F}_p \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ を合成 $\mathbb{F}_p \longrightarrow \mu_p(K) \subset \mu_m(K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ として定義する。ただし、最初の射は $1 \mapsto \zeta$ とし、次の射は $\chi$ であるものとする。また、標準同型 $\mu_{m'}(k) \simeq \mu_{m'}(K)$ と部分群 $\mu_{m'}(K) \subset \mu_m(K)$ への制限 $\chi|_{\mu_{m'}(K)}$ との合成として、指標 $\chi' : \mu_{m'}(k) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ を定義する。関数 $f \in k[s]$ に対し, アフィン直線 $\mathbb{A}_k^1$ 上の、アルティン・シュライヤー被覆 $y^p - y = f$ と指標 $\psi_0$ で定まる層を $\mathscr{L}_{\psi_0}(f)$ とかく。関数 $f \in k[s^{\pm}]$ に対し、$\mathbb{G}_m$ 上の、クンマー被覆 $y^{m'} = f$ と指標 $\chi'$ で定まる層を $\mathscr{K}_{\chi'}(f)$ とかく。

元 $f \in K^{\times}$ に対し、 二次のクンマー拡大 $y^2 = f$ で定まる Spec$K$ 上の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_l$-層を $\mathscr{Q}(f)$ とかく。元 $f \in K^{\times}$ に対し、 $m$ 次のクンマー拡大 $y^m = f$ と指標 $\chi$ で定まる Spec$K$ 上の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_l$-層を $\mathscr{K}_{\chi}(f)$ とかく。フェルマー曲線の商 $F_{a,b,c}^m : y^m = (-1)^c x^a (1-x)^b$ を考える。この曲線 $F_{a,b,c}^m$ は、幾何的に連結である。この曲線は、 ガロワ群を $\mu_m(K)$ にもつ $U_K := \mathbb{P}_K^1 - \{0, 1, \infty\} = \mathrm{Spec}K[x^{\pm 1}, \frac{1}{1-x}]$ の有限エタール・ガロワ被覆になっている。$U_K$ 上、$F_{a,b,c}^m : y^m = (-1)^c x^a (1-x)^b$ と指標 $\chi$ で定まる smooth $\overline{\mathbb{Q}}_l$-層を $\mathscr{K}_{\chi}$ と書く。我々の主定理はエタール・コホモロジー群 $H_c^1(U_{\bar{K}}, \mathscr{K}_{\chi})$ へのガロワ作用を明示的に計算するものである。

**Theorem 0.1.** *(Coleman-McCallum)* 記号と仮定は上記通りとする。
*1.* $n=r$ とする。このとき、一次元 $G_K$ 表現の同型として以下が成立する。

$$H^1_c(U_{\bar{K}},\mathscr{K}_\chi)\simeq\mathscr{K}_\chi((-1)^c(\pi p^n)^a)\otimes H^1_c(\mathbb{G}_{m,\bar{k}},\mathscr{K}_{\chi'}(s^{a'})\otimes\mathscr{L}_{\psi_0}(\frac{b}{m'}s)).$$

*2.* 次に $p\geq 5$ と $n>r$ を仮定する。 $\gamma=\frac{a'}{2m'}\in k$ とおく。このとき、一次元 $G_K$ 表現の同型として以下が成立する。

$$H^1_c(U_{\bar{K}},\mathscr{K}_\chi)\simeq\mathscr{K}_\chi(a^ab^bc^c)\otimes\mathscr{Q}(\pi p^{n-r})\otimes H^1_c(\mathbb{A}^1_{\bar{k}},\mathscr{L}_{\psi_0}(\gamma s^2)).$$

この主定理は、Abbes-斎藤氏によるアイデアに基づいて示されることは先に述べた。以下、そのアイデアについて述べる。両氏は層係数の消滅輪体を計算するときに、その消滅輪体の台を適当な重複度を込めて爆発することで、考えている層を smooth に延長し計算する、という手法を用いた。考えている層が smooth に延長されると、何故消滅輪体、あるいはエタール・コホモロジーへのガロワ作用が計算出来るか、については後述する。このアイデアを $\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の場合に移植することで、エタール・コホモロジーを計算することが出来る。以上述べたことをより詳しく書く。主定理の 1 について述べる。2 も全く同様の議論で出来る。$H^1_c(U_{\bar{K}},\mathscr{K}_\chi)$ を計算することは $\mathscr{K}_\chi$ 係数の消滅輪体を計算することに等しく、1 の場合その台が特殊ファイバーの原点 $x=0$ にあることが見て取れる。先の Abbes-斎藤氏によるアイデアを踏襲すれば、原点を適当な重複度を込めて爆発すればよい、ということになる。次にどれほどの重複度を付けて爆発すればよいか、という問題になるが、これは以下のよく知られた補題からわかる。

一般に、$\mathcal{O}_K$ 上平坦な正則ネーター・スキーム $U$ を考える。$D\subset U$ を既約因子とする。$U\backslash D=U\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ と仮定する。$U$ 上の可逆関数 $f$ に対し、制限写像 $\Gamma(U,\mathcal{O}_U^\times)\longrightarrow\Gamma(D,\mathcal{O}_D^\times)$ の像を $\bar{f}$ とかく。指標 $\chi$ とクンマー拡大 $y^m=f$ に付随する $U\backslash D$ 上の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_l$-層を $\mathscr{K}_\chi(f)$ とかく。$D$ 上の可逆関数 $\bar{f}$ に対し、指標 $\chi'$ とクンマー被覆 $y^{m'}=\bar{f}$ から決まる $D$ 上の層を $\mathscr{K}_{\chi'}(\bar{f})$ とかく。$D$ 上の正則関数 $\bar{h}$ に対し、$\psi_0$ とアルティン・シュライヤー被覆 $y^p-y=\bar{h}$ で定まる $D$ 上の層を $\mathscr{L}_{\psi_0}(\bar{h})$ であらわす。このとき、以下の補題が成り立つ。

**Lemma 0.2.** $f$ を $U$ 上の可逆関数とする。$f-1$ が $\pi^pp^{n-1}$ で割れるとせよ。$h:=(f-1)/\pi^pp^{n-1}$ とおく。このとき、以下が成り立つ。
*1.* 層 $\mathscr{K}_\chi(f)$ は、$U$ 上の *smooth* な層に延長される。これを $\widetilde{\mathscr{K}}$ とかく。
*2.* $\widetilde{\mathscr{K}}$ の $D$ への制限は、$\mathscr{L}_{\psi_0}(\frac{\bar{h}}{m'})$ である。

今我々が考えたいクンマー層は、$y^m=(-1)^cx^a(1-x)^b$ であった。このクンマー層を $y^m=(-1)^cx^a$ と $y^m=(1-x)^b$ から決まるクンマー層のテンソル積に分けて考えて見れば、最初のものは仮定 $n=r$ により初めから smooth になっているので、二つ目がどういう重複度で爆発すれば smooth に延びるか、という問題になる。これは先述通り、上の補題が其の答えを与えている。補題 1 によれば関数 $(1-x)^b-1$ が $\pi^pp^{n-1}$ で割れて欲しいから、$(x,\pi p^n)$ で爆発すればよい、ことがわかる。実際、$x=\pi p^ns$ とおけば、

$$y^m=1+b\pi^pp^{n-1}s+\text{higher terms}$$

となり補題が適用できる。以下、上の等式の右辺を $f$ とかく。この爆発により元のクンマー被覆

は $y^m = (-1)^c(\pi p^n)^a s^a f$ と書け、射影公式より次の同型を得る。

$$H^1_c(U_{\bar{K}}, \mathscr{K}_\chi) \simeq \mathscr{K}_\chi((-1)^c(\pi p^n)^a) \otimes H^1_c(U_{\bar{K}}, \mathscr{K}_\chi(s^a f)).$$

$\mathscr{K}_\chi(s^a f)$ が smooth 層に延びると何故コホモロジーへのガロワ作用、あるいは消滅輪体が計算できるか、であるがそれは次の cospecialization map が得られるからである。

$$H^1_c(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, \mathscr{K}_{\chi'}(s^{a'}) \otimes \mathscr{L}_{\psi_0}(\frac{b}{m'}s)) \longrightarrow H^1_c(U_{\bar{K}}, \mathscr{K}_\chi(s^a f)).$$

右辺のコホモロジー群の次元が 1 であることは容易にわかる。左辺のコホモロジー群の次元が 1 であることはグロダンディーク・オッグ・シャファレビッチ公式から従う。ゆえに、この射が単射であることを示せばよい。これはよく知られた SGA1 にある "基本群に関する semi-continuity の基本定理" に帰着して示される。上記二つの同型により、Theorem 0.1 の 1 が証明される。以上が主定理の証明の骨子である。

## 参考文献


[AS] A. Abbes and T. Saito,
Local Fourier transform and epsilon factor, arXiv:08090180v1[mathAG], to appear in Compositio Mathematica.

[CW] R. Coleman and W. McCallum, Stable reduction of Fermat curves and Jacobi sum Hecke characters, J. reine. angew. Math. (1988), 41-101.

[D] P. Deligne, Cohomologie étale, SGA $4\frac{1}{2}$, LNM 569, Springer-Verlag (1977).

[K1] K. Kato, Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case, Algebraic K-Theory and algebraic number theory(Honolulu, HI, 1987) , Comtemp. Math.,83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1989), 101-131.

[K2] K. Kato, Class field theory, $\mathcal{D}$-modules, and ramification of higher dimensional schemes, Part I, American J. of Math., 116 (1994), 757-784.

[La] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Publ. Math. IHES, 65 (1987), 131-210.