論文の内容の要旨

**Principal series and generalized principal series Whittaker functions with peripheral $K$-types on the real symplectic group of rank 2**

**(実二次シンプレクティック群上の主系列表現及び一般主系列表現の周辺的 $K$-type を持つ Whittaker 関数)**

氏名：長谷川泰子

一般に保型形式の，あるいは特に Langlands 型の Eisenstein 級数の，Fourier 展開を考える時に，実リー群上の大域的な Whittaker 関数は重要な役割を果たす．$p$ 進体上の不分岐主系列表現の Whittaker 関数の明示公式は Casselman-Shalika によって与えられている．一方で実数体上の Whittaker 関数については，存在と一意性は分裂する群に対しては Shalika によって示されている．Whittaker 関数の明示的な公式は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 以外は階数の低い群に対していくつかの結果がある．ここでは実 2 次シンプレクティック群上の Whittaker 関数について考える．

これまで，実二次シンプレクティック群 $G=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の極小 $K$-type を持つ Whittaker 関数の明示公式は極小放物形部分群に付随する主系列表現 ($P_{\mathrm{min}}$-series) のときは石井卓によって，Jacobi 極大放物型部分群から誘導された一般型主系列表現 ($P_{\mathrm{J}}$-series) は宮崎琢也・織田孝幸によって，離散系列表現は織田によって得られている．すなわち標準表現の中では唯一 Siegel 極大放物型部分群 $P_{\mathrm{S}}$ から誘導された一般主系列表現 ($P_{\mathrm{S}}$-series) の Whittaker 関数の明示公式だけ得られていない．そこで本稿では $P_{\mathrm{S}}$-series の Whittaker 関数の明示公式を得ることを目的とする．

第一節では主定理の一つである $P_{\mathrm{min}}$-series に属する 第二種の Whittaker 関数で任意の 1 次元 $K$-type に属するものの明示公式を得た．これは石井によって得られている極小 $K$-type における明示公式を用い，それにシフト作用素を施すことによって得られる．より詳しく言えば，元々，$P_{\mathrm{min}}$-series Whittaker 関数の動径成分の満たす holonomic 系はは宮崎・織田によって与えられている．すなわち普遍包絡環 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\ \mathrm{G}$) を生成する二次と四次の作用素を Whittaker 関数に作用させることで，二つの微分方程式が与えられている．しかしこれを直接解くことは困難である．そこで我々の場合，1 次元 $K$-type（特に最高重さ (0,0)）における石井の明示公式を用いて，それに $K$-type の間の Clebsh-Gordan 分解の injector や projector を合わせることで（つまり Dirac-Schmid 作用素の合成で）微分方程式系を満たす解を求めた．

群 $G$ の分裂カルタン部分群の連結成分を

$$A=\left\{\left.\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1}\end{pmatrix}\right| a_1,a_2\in\mathbb{R}_{>0}\right\}$$

とするとき，$P_{\min}$-series Whittaker 関数は $y_1=a_1/a_2=0$, $y_2=a_2^2=0$ の周りで確定特異点型である．すなわち $y_1=0$, $y_2=0$ で正規交叉する二つの divisor がある．よって，$(y_1,y_2)=(0,0)$ の周りで Whittaker 関数はべき級数展開できる：

Theorem. *全ての 1 次元 $K$-type $\tau_{(l,l)}$ を持つ Whittaker 関数を*

$$\varphi^{(l,l)}_{(\tau_1,\tau_2)}(y)=\sum_{m,n\geq 0}a^{(l,l)}_{m,n}(2\pi y_1)^{2m+\tau_1}(2\pi y_2)^{n+\tau_2}$$

*とする．この時，係数 $a^{(l,l)}_{m,n}$ は一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の 1 での値を用いて明示できる．*

第二節ではまず，$\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 $D_k$ から誘導される一般化主系列表現 $\Pi=\Pi_{(e^{\nu_{\mathrm{S}}}\otimes D_k\otimes 1_{N_{\mathrm{S}}})}$ を定義した．ここで冪単部分群 $N_{\mathrm{S}}$ がアーベル群となる極大放物型部分群 $P_{\mathrm{S}}$ に対し，$P_{\mathrm{S}}=N_{\mathrm{S}}M_{\mathrm{S}}A_{\mathrm{S}}$ を Langlands 分解とすると，$M_{\mathrm{S}}=\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ であることに注意する．そして，我々が peripheral $K$-type と呼ぶ，次元が最小の特別な $K$-type（特にこの $K$-type は重複度が 1 である）の周辺の $(\mathfrak{g},K)$-加群の構造を詳しく計算した．$G$ の表現 $\Pi$ の peripheral $K$-type を $(\tau,V_\tau)$ とすると，その dominant weight は $l=(l+k,l)$ $(l\in\mathbb{Z})$ の形である．本稿の二つ目の主結果は $P_{\mathrm{S}}$-series の $K$-type $\tau_{(l+k,l)}$（$l\in\mathbb{Z}$）を持つベクトル値の Whittaker 関数が満たす 3 種類の微分方程式系を明示的に求めたことである．微分方程式の一つは Casimir 方程式で，残りの二つは Dirac-Schmid 作用素から得られる．得られた偏微分方程式系は Weyl 群の位数と同じ 8 次の解空間を持つ holonomic 系であると予想している．

この予想を第三節の特別な場合，すなわち $k=2$, $l=-1$ の場合に正当化する．

第三節では，$k=2$, $l=-1$ における偏微分方程式の解の例を与えた．本節では $P_{\mathrm{S}}$-series は $\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 $D_2$ から誘導されている（つまり $k=2$）．まず表現の埋め込み $\Pi\hookrightarrow\pi$ を考える．

$\pi$ の 1 次元 $K$-type に属する Whittaker 関数（石井の結果）を $S(\mathfrak{p}_{\pm})$ $(\hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ の元で $\Pi$ の中へ移して，$\Pi$ の中に生じる peripheral $K$-type を持つ Whittaker 関数を得た．今の場合は $K$-type $\tau_{(1,-1)}$ に属するもので，8 次元分一次独立なものが得られた．

以上より，8 つの非緩増加 Whittaker 関数の明示公式を得られたが，保型形式においては緩増加 Whittaker 関数が重要な役割を果たす．例えば Eisenstein cohomology や Hodge 構造といった数論的対象物に応用することはこれが必要となる．石井による極小 $K$-type における緩増加 Whittaker 関数と非緩増加 Whittaker 関数との関係式（展開定理）を拡張することは今後の課題である．