論文内容の要旨

論文題目

The structures of generalized principal series representations of $SL(3,\mathbf{R})$ and related Whittaker functions

($SL(3,\mathbf{R})$ の一般主系列表現の構造と関連する Whittaker 関数)

氏名　宮崎　直

私は本論文で $SL(3,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数についての研究を行った．Whittaker 関数は簡約群上の保型形式の Fourier 展開に現れる球関数の中で，最も基本的なものである．特に $GL(n)$ 上の保型形式に関しては Piatetski-Shapiro によって，Whittaker 関数のみによる Fourier 展開 (**Fourier-Whittaker 展開**) が発見されており，保型 L 関数等への応用を考える上で Whittaker 関数は非常に重要である．

より明確な形で問題を述べる．G を簡約 Lie 群，$G=NAK$ をその岩澤分解とする．G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$，その複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ と表記する．極大冪単部分群 N の非退化ユニタリ指標 η に対して，$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ を $f(ng)=\eta(n)f(g)$ $((n,g)\in N\times G)$ をみたすような G 上の滑らかな関数 f 達のなす空間とし，G はこの空間に右移動で作用するものとする．G の既約許容表現 (π,H_π) に対して，

$$\mathcal{I}_{\eta,\pi}=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(H_{\pi,K},C_\eta^\infty(N\backslash G)),\qquad \mathcal{I}_{\eta,\pi}^G=\mathrm{Hom}_G(H_\pi^\infty,C_\eta^\infty(N\backslash G))$$

とおく．このとき，$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ の元の像に含まれる関数を**第 2 種 Whittaker 関数**と呼び，$\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ の元の像に含まれる関数を**第 1 種 Whittaker 関数**と呼ぶ．冒頭で述べた $GL(n)$ 上の保型形式の Fourier-Whittaker 係数の無限素点での局所成分は第 1 種 Whittaker 関数であり，Shalika によって $\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ は高々1 次元である事が証明されている．また，$G=GL(n,\mathbf{R})$ のとき，$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ が 0 でない元を持つような π は一般主系列表現と同型になる事が知られている．本論文の目的は $G=GL(3,\mathbf{R})$ または $SL(3,\mathbf{R})$ の一般主系列表現 π に対して，2 つの空間 $\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ と $\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ を明示的に理解する事である．

$SL(3,\mathbf{R})$ の (極小放物型部分群から誘導された) 主系列表現の極小 K-タイプにおける Whittaker 関数の明示式は Bump [1] と Manabe, Ishii, Oda [3] によって，既に与えられている．これを踏まえて研究を行い，本論文では以下の 2 つの結果を得た：

1. $SL(3,\mathbf{R})$ の全ての一般主系列表現の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群としての構造の明示的な記述を与えた．

2. $SL(3,\mathbf{R})$ の極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現の極小 K-タイプにおける第 1 種と第 2 種の Whittaker 関数の明示式を与えた．

本論文は独立した3つの部分に分かれている．Part 1で上記の1つ目の結果について述べ，Part 2，3では2つ目の結果について述べている．Part 2，3の結果と既知の主系列表現の結果を合わせると，全ての$GL(3,\mathbf{R})$の一般主系列表現に対して，極小K-タイプにおけるWhittaker関数の明示式が得られた事になる．また一般主系列表現が既約なとき，原理的にはPart 1での$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群構造の記述を用いれば，極小$K$-タイプにおけるWhittaker関数の明示式から，すべてのK-タイプでの明示式が得られる．

Part 1. The structures of standard $(\mathfrak{g},K)$-modules of $SL(3,\mathbf{R})$.
($SL(3,\mathbf{R})$の標準$(\mathfrak{g},K)$-加群の構造)

このPart 1では，$G=SL(3,\mathbf{R})$のすべての一般主系列表現に対して，$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群構造の記述を与えた．$G$の主系列表現$\pi=\mathrm{Ind}_P^G(1_N\otimes e^{\nu+\rho}\otimes\sigma)$は$K$-加群として$L^2(K)$の部分空間

$$L^2_{(M,\sigma)}(K)=\{f\in L^2(K)\mid f(mx)=\sigma(m)f(x)\text{ for a.e. }m\in M,\ x\in K\}$$

と同型になる．ここで，$P=NAM$は極小放物型部分群とそのLanglands分解であり，$e^{\nu+\rho}$はAの指標，σはMのユニタリ指標である．Peter-Weylの定理より，$L^2_{(M,\sigma)}(K)$はKの既約有限次元表現の行列係数からなるHilbert空間としての基底を持つ事が分かる．

以上のようにして，主系列表現のK-加群としての構造は容易に分かるため，$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$の作用を記述する事が問題となる．Cartan分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$より，$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$の作用を記述すれば十分である．ここで，$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$の作用の$K$-タイプへの影響を特徴付ける線型写像を定義し，その行列表示を与えた．その結果を用いて，前述した行列係数から成る主系列表現πの基底$\{s(l;p,q)\}_{l,p,q}$上の$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$の基底$\{X_i\}_i$の作用について

$$\pi(X_i)s(l;p,q)=\sum_{l',p',q'}C_i(l,p,q;l',p',q')\cdot s(l';p',q')$$

という形の公式を得た．ここで，係数$C_i(l,p,q;l',p',q')$は$s(l;p,q)$のパラメータl,p,qの有理式で具体的に与えられている．また，極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現についても，同様の結果を得た．このPart 1の内容は論文[5]と同一である．

Part 2. Whittaker functions for generalized principal series representations of $SL(3,\mathbf{R})$.
($SL(3,\mathbf{R})$の一般主系列表現に関するWhittaker関数)

このPart 2では微分方程式を解く事によって，$G=SL(3,\mathbf{R})$の極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現の極小K-タイプにおける第1種と第2種のWhittaker関数の明示式を得た．まず，極小K-タイプ周辺の$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群構造を評価する事で，Whittaker関数を特徴付ける微分方程式を立式した．そして，その微分方程式を解いて，6つの冪級数解，すなわち，第2種Whittaker関数の冪級数表示を得た．また，定数倍を除いて唯一つの緩増加な解，すなわち，第1種Whittaker関数のMellin-Barnes型の積分表示

$$W_{(n_1,n_2,n_3)}(y)=\frac{(-1)^{n_1}(\sqrt{-1})^{n_2}y_1y_2}{(2\pi\sqrt{-1})^2}$$
$$\times\int_{s_2}\int_{s_1}\frac{\Gamma\big(s_1+\frac{\nu}{2}+\frac{\kappa-1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{s_1-\nu+n_1}{2}\big)\Gamma\big(s_2-\frac{\nu}{2}+\frac{\kappa-1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{s_2+\nu+n_3}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{s_1+s_2+n_1+n_3}{2}\big)}(2\pi y_1)^{-s_1}(2\pi y_2)^{-s_2}ds_1ds_2$$
$$\Big(\ y=(y_1y_2^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot\mathrm{diag}(y_1y_2,y_2,1)\in A\ \Big)$$

を与えた．ここで，$\int_{s_i}$ の積分路は s_i: $\sigma - \sqrt{-1}\infty \to \sigma + \sqrt{-1}\infty$ ($\sigma \in \mathbf{R}$ は被積分関数の任意の極の実部より大きくなるようにとる) であり，(ν, k) と (n_1, n_2, n_3) はそれぞれ π と極小 K-タイプの基底のパラメータである．また，K-タイプを固定したとき，岩澤分解 $G = NAK$ より，Whittaker 関数はその A への制限で特徴づけられる事に注意しておく．この Part 2 の内容は論文 [6] と同一である．

Part 3. The Eisenstein series for $GL(3, \mathbf{Z})$ induced from cusp forms.
(尖点形式から誘導された $GL(3, \mathbf{Z})$ に関する Eisenstein 級数)

極小放物型 Eisenstein 級数と定数関数から誘導された極大放物型 Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開については，Bump [1] と Friedberg [2] によって具体的に書き下されている．この Part 3 では，尖点的保型表現から誘導された $GL(3, \mathbf{Z})$ に関する極大放物型 Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開を具体的に書き下した．

Jacquet は主系列表現 $\pi = \mathrm{Ind}_P^G(1_N \otimes e^{\nu+\rho} \otimes \sigma)$ に対して，

$$H_\pi^\infty \ni f \mapsto J(f; g) = \int_N f(wng)\eta(n)^{-1}dn \in C_\eta^\infty(N\backslash G) \qquad (w \text{ は Weyl 群の最長元})$$

という積分 (とその解析接続) で定義される $\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ の生成元を与えた．これを **Jacquet 積分**と呼ぶ．Casselmann の部分表現定理より，任意の既約許容表現は主系列表現に埋め込まれるため，任意の既約許容表現の第 1 種 Whittaker 関数が Jacquet 積分で与えられる．また，Jacquet 積分はそのままではゼータ積分の計算等の数論的な応用に適さないものの，Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開を書き下すのには適している．これは Jacquet 積分が元々，極小放物型 Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 係数として発見されたものである事に由来すると思われる．ここでは，まず Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 係数に Jacquet 積分を用いた表示を与え，Jacquet 積分を評価する事によって， 極小 K-タイプにおける Mellin-Barnes 型の積分表示を得た．第 1 種 Whittaker 関数の一意性より，この積分表示は [1]，[3]， Part 2 で得られたものと定数倍を除いて一致している．この Part 3 の内容は論文 [4] と同一である．

参考文献

[1] Daniel Bump. *Automorphic forms on* GL$(3, \mathbf{R})$, volume 1083 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Solomon Friedberg. A global approach to the Rankin-Selberg convolution for GL$(3, \mathbf{Z})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(1):159–174, 1987.

[3] Hiroyuki Manabe, Taku Ishii, and Takayuki Oda. Principal series Whittaker functions on SL$(3, R)$. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 30(1):183–226, 2004.

[4] Tadashi Miyazaki. The Eisenstein series for $GL(3, \mathbf{Z})$ induced from cusp forms. *submitted.*

[5] Tadashi Miyazaki. The structures of standard $(\mathfrak{g}, K)$-modules of SL$(3, \mathbf{R})$. *Glas. Mat. Ser. III*, 43(2):337–362, 2008.

[6] Tadashi Miyazaki. Whittaker functions for generalized principal series representations of SL$(3, \mathbf{R})$. *Manuscripta Math.*, 128(1):107–135, 2009.