論文審査の結果の要旨

氏 名 宮﨑 直

論文題目

The structures of generalized principal series representations of $SL(3,\mathbf{R})$
and related Whittaker functions
($SL(3,\mathbf{R})$ の一般主系列表現の構造と
関連する Whittaker 関数)

Whittaker 関数は簡約群上の保型形式の Fourier 展開に現れる球関数の中で，最も基本的なものである．特に $GL(n)$ 上の保型形式に関しては Piatetski-Shapiro 等によって，Whittaker 関数のみによる Fourier 展開 (Fourier-Whittaker 展開) が発見されており，保型 L 関数等への応用を考える上で Whittaker 関数は非常に基本的である．

この論文において、著者は次のような結果を得た：

1. $SL(3,\mathbf{R})$ の全ての一般主系列表現の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群としての構造の明示的な記述を与えた．

2. $SL(3,\mathbf{R})$ の極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現の極小 K-タイプにおける第 1 種と第 2 種の Whittaker 関数の明示式を与えた．

3. これの応用として、Primitive な尖点形式から誘導された $GL(3,\mathbf{Z})$ に関する Eisenstein 級数の Fourier 展開の 1 次指標の対応する部分の明示的な表示式を得た．

このうち、1 と 2 の部分は、二つの論文：
Tadashi Miyazaki. The structures of standard $(\mathfrak{g},K)$-modules of $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. *Glas. Mat. Ser. III*, 43(2):337–362, 2008;
Tadashi Miyazaki. Whittaker functions for generalized principal series representations of $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. *Manuscripta Math.*, 128(1):107–135, 2009
として既に発表されている．以下、より詳細な形で問題を述べる．

Part 1. $SL(3,\mathbf{R})$ の標準 $(\mathfrak{g},K)$-加群の構造

この Part 1 では，$G=SL(3,\mathbf{R})$ のすべての一般主系列表現に対して，$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群構造の記述を与えている．$G$ の主系列表現 $\pi=\mathrm{Ind}_P^G(1_N\otimes e^{\nu+\rho}\otimes\sigma)$ は K-加群として $L^2(K)$ の部分空間

$$L^2_{(M,\sigma)}(K)=\{f\in L^2(K)\mid f(mx)=\sigma(m)f(x)\text{ for a.e. } m\in M,\ x\in K\}$$

と同型になる．ここで，$P=NAM$ は極小放物型部分群とその Langlands 分解であり，$e^{\nu+\rho}$ は A の指標，σ は M のユニタリ指標である．Peter-Weyl の定理より，$L^2_{(M,\sigma)}(K)$ は K の既約有限次元表現の行列係数からなる Hilbert 空間としての基底を持つ事が分かる．これで、主系列表現の K-加群としての構造は分かる．問題は，$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の作用を記述する事である．

Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ より，$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ の作用を記述すれば十分である．ここで，$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ の作用の K-タイプへの影響を特徴付ける線型写像を定義し，その行列表示を与えた．その結果を用いて，前述した行列係数から成る主系列表現 π の基底 $\{s(l;p,q)\}_{l,p,q}$ 上の $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ の基底 $\{X_i\}_i$ の作用について

$$\pi(X_i)s(l;p,q)=\sum_{l',p',q'}C_i(l,p,q;l',p',q')\cdot s(l';p',q')$$

という形の公式を得た．ここで，係数 $C_i(l,p,q;l',p',q')$ は $s(l;p,q)$ のパラメータ l,p,q の有理式で具体的に与えられている．また，極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現についても，同様の結果を得た．

Part 2. $SL(3,\mathbf{R})$ の一般主系列表現に関する Whittaker 関数

問題の設定を少し一般的に述べる．G を簡約 Lie 群，$G = NAK$ をその岩澤分解とする．G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$，その複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ と表記する．極大冪単部分群 N の非退化ユニタリ指標 η に対して，$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ を $f(ng) = \eta(n)f(g)$ $((n,g) \in N \times G)$ をみたすような G 上の滑らかな関数 f 達のなす空間とし，G はこの空間に右移動で作用するものとする．G の既約許容表現 (π, H_π) に対して，

$$\mathcal{I}_{\eta,\pi} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)}(H_{\pi,K}, C_\eta^\infty(N\backslash G)), \qquad \mathcal{I}_{\eta,\pi}^G = \mathrm{Hom}_G(H_\pi^\infty, C_\eta^\infty(N\backslash G))$$

とおく．このとき，$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ の元の像に含まれる関数を第 2 種 Whittaker 関数と呼び，$\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ の元の像に含まれる関数を第 1 種 Whittaker 関数と呼ぶ．冒頭で述べた $GL(n)$ 上の保型形式の Fourier-Whittaker 係数の無限素点での局所成分は第 1 種 Whittaker 関数であり，Shalika によって $\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ は高々1 次元である事が証明されている．また，$G = GL(n,\mathbf{R})$ のとき，$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ が 0 でない元を持つような π は一般主系列表現と同型になる事が知られている．本論文の目的は $G = GL(3,\mathbf{R})$ または $SL(3,\mathbf{R})$ の一般主系列表現 π に対して，2 つの空間 $\mathcal{I}_{\eta,\pi}$ と $\mathcal{I}_{\eta,\pi}^G$ を明示的に理解する事である．

$SL(3,\mathbf{R})$ の (極小放物型部分群から誘導された) 主系列表現の極小 K-タイプにおける Whittaker 関数の明示式は class one のときは 80 年代に D. Bump によって、その他の場合は 2003 年ごろ H. Manabe, T. Ishii, T. Oda によって，既に与えられている．

この Part 2 では微分方程式を解く事によって，$G = SL(3,\mathbf{R})$ の極大放物型部分群から誘導された一般主系列表現の極小 K-タイプにおける第 1 種と第 2 種の Whittaker 関数の明示式を得た．まず，極小 K-タイプ周辺の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-加群構造を評価する事で，Whittaker 関数を特徴付ける微分方程式を立式した．そして，その微分方程式を解いて，6 つの冪級数解，すなわち，第 2 種 Whittaker 関数の冪級数表示を得た．また，定数倍を除いて唯一つの緩増加な解，すなわち，第 1 種 Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型の積分表示を与えた．

Part 3. The Eisenstein series for $GL(3,\mathbf{Z})$ induced from cusp forms.
(尖点形式から誘導された $GL(3,\mathbf{Z})$ に関する Eisenstein 級数)

極小放物型 Eisenstein 級数と定数関数から誘導された極大放物型 Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開については，Bump と Friedberg によって具体的に書き下されている．この Part 3 では，尖点的保型表現から誘導された $GL(3,\mathbf{Z})$ に関する極大放物型 Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開を具体的に書き下した．これは、Part 1, 2 の応用になっている．

群 $SL(3,\mathbf{R})$ 上の保型形式・保型表現に関しては、意外にも多くのことがきちんと知られていない．実の Whittaker 関数に関しても、存在と一意性という，あるいみでは抽象的な結果はあるが，整数論の立場からはこれで満足するわけにはいかない．明示的な公式があることは将来のより深い研究のためには極めて有益であることは疑いがない．ここで論文の著者が得た結果は、基本的で重要である．それゆえ、論文提出者　宮﨑直　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．