論文の内容の要旨

論文題目： Comparison between Swan conductors and characteristic cycles
（Swan 導手と特性サイクルの比較について）

氏名： 阿部　知行

まず, [主論文] では数論的 $\mathscr{D}$ 加群の理論と ℓ 進コホモロジーの分岐理論の関係について研究している. k を標数 0 の体として U を k 上滑らかな代数多様体, $\mathscr{L}$ を U 上の滑らかな ℓ 進層（ここで ℓ は $p = \mathrm{ch}(k)$ とは互いに素なものとする）とし, コンパクト台を持つ $\mathscr{L}$ の U 上のコホモロジーのオイラー・ポアンカレ標数を $\chi_c(U, \mathscr{L})$ とする. すると $\chi_c(U, \mathscr{L}) = \mathrm{rk}(\mathscr{L}) \cdot \chi_c(U, \mathbb{Q}_\ell)$ という非常に簡明な関係式を持つことが古くから知られている. k の標数が $p > 0$ になると状況が一変し、一般に等しくはならず, その差を計算することは分岐理論の主題でもある. 曲線の場合には差は Swan 導手と呼ばれる数で表すことができ, Grothendieck-Ogg-Shafarevich (G-O-S) の定理と呼ばれている. 一般の滑らかな代数多様体に関しては Bloch, Laumon, Kato, S. Saito などの研究があり, 近年加藤和也先生と斎藤毅先生による共同論文 [KS] により一般の滑らかな代数多様体上の滑らかな層に対して Swan 導手という 0 次元代数サイクルが定義された. これは G-O-S の定理の類似を満たし, 良いものといえる. しかし古典的には Hasse-Arf の定理に相当する Swan 導手の整数性の問題が予想という形で残された. なお, [KS] ではこの整数性の予想から長く懸案であった Serre の Artin 指標に関する予想が導かれることが示されていて, その意味でも重要であると思われる. [主論文] で私は X 上の unit-root F-overconvergent isocrystal の Swan 導手を数論的 $\mathscr{D}$ 加群の特性サイクルを用いて定義し, それが Kato-Saito の Swan 導手と同様の性質を満たすことを示した. 特性サイクルに対しては解析的 $\mathscr{D}$ 加群の場合と同様に Kashiwara-Dubson の公式およびそれを相対化したものを示すことができる. これを用いることによって Kato-Saito の Swan 導手との比較定理を特異点の解消を仮定して示すことができ, 整数性の予想をその仮定の下で示すことに成功した. これらのことを示すためには, アイディアは古典的なものの, 数論的 $\mathscr{D}$ 加群の基礎理論の欠如による困難を回避するために技術的な議論が必要になってくる. 特異点の解消を外すのは困難で, さらなる特性多様体および特性サイクルの研究が必要になってくると思われ今後の研究につながっていくものである. この論文以前, 数論的 $\mathscr{D}$ 加群の理論が実際の応用で用いられたケースは少なく, 今回の結果はそのような貴重な例の一つということができる.

この研究により数論的 $\mathscr{D}$ 加群の特性サイクルが分岐理論と深くかかわっていることが分かる. しかし特性サイクルは今のところ任意の連接的 $\mathscr{D}^\dagger$ 加群に対して定義されているわけではなく, Frobenius 構造という非常に強い構造をもつもののみに対して構成されている. これを一般的なものに対しても定義しようと試みるのは自然なことである. それをするためには余接束の上に超局所化すると見通しが良くなると思われる. [参考論文 1] では超局所微分層の構成とその基礎的な性質を示し, それらを用いることで曲線上の場合の特性サイクルの定義に成功している. 微分作用素の成す環 $\mathscr{D}^\dagger$ はレベル m の微分作用環 $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}$ の順極限で定義されている. 各 $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}$ の超局所化をするのは形式的で容易であるが, 出てくるレベルの異なる超局所環同士に射がなくなってしまう. この困難の処理が最も技術的な部分である.

p 進コホモロジーの理論には有限性の問題が非常に重要な問題としてある. この問題の中核は temperate な局所化に対してホロノミック性が保存されるという柏原先生の定理の類似にある. これを柏原先生は b 関数の存在を示すことによって示した. 今回の場合ナイーブに b 関数を定義してしまうと意味のないもになってしまうところに難しさがある. 曲線の場合は b 関数は微分方程式の指数と密接に関係しているべきであり, これはよく研究されている. もし b 関数による証明が存在しているのであれば, b 関数が 1 になる特異点で正則特異部が存在しない場合有限性が示されるはずである. この期待が正しいことを [参考論文 2] で示している.

参考文献

[主論文] T. Abe, *Comparison between Swan conductors and characteristic cycles.*

[参考論文 1] T. Abe, *Rings of microdifferential operators for arithmetic $\mathscr{D}$-modules.*

[参考論文 2] T. Abe, *Coherence of certain overconvergent isocrystals without Frobenius structures on curves.*

[KS] K. Kato, T. Saito, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, Ann. Math. (2) **168** (2008), 33–96.