論文の内容の要旨

論文題目　Solvability and irreducibility of difference equations
（差分方程式の可解性と既約性）

氏　　名　西岡斉治

初等関数は微積分学において基本的な関数で、例えば指数関数、対数関数、三角関数やその逆関数は初等関数である．初等関数は微分代数学において研究されてきた．Rosenlicht は微分体（微分を付加した体）の初等拡大を定義し，初等関数を代数的に研究した．初等拡大は代数的操作と対数と指数を有限個用いて表現される関数によって構成される．この考え方は Liouville による．本論文では差分方程式の可解性と既約性をこのような見地から研究している．つまり，与えられた差分方程式の解がある種の関数たち有限個を用いて表示されるか，という問題を扱っている．

初等関数は微分代数の分野では馴染みのものだが，一方で差分代数においてどのような関数が初等的と言えるのかは未だ明らかではない．Karr は $\Pi\Sigma$ 拡大を定義し Liouville の定理と呼ばれる初等拡大についての定理の差分類似を与えた．$\Pi\Sigma$ 拡大は $y_1 = \alpha y + \beta$, $\alpha \neq 0$ という形の差分方程式の解で構成される．例えばガンマ関数は $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ をみたすが，これは $\alpha = x$, $\beta = 0$ の場合の式である．同様に $\log\Gamma(x+1) = \log\Gamma(x) + \log x$ では $\alpha = 1$, $\beta = \log x$ である．

ガンマ関数は x を $x+1$ にする変換作用素による差分方程式をみたすが，それ以外の変換作用素も考えうる．変換作用素の例を単純な差分方程式を交えつつ紹介する．例えば $\cos x$ は倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ をみたす．これを x を $2x$ にする変換作用素による差分方程式と考えよう．この変換作用素に関して，$\log x$ は $y_1 = y + \log 2$ をみたす．$\Pi\Sigma$ 拡大の方程式で $\alpha = 1$, $\beta = \log 2$ の場合である．ところで q-ガンマ関数と呼ばれる関数がある．この関数は Γ_q と書かれ，$0 < q < 1$

で定義され，次をみたす．

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{1-q^x}{1-q}\Gamma_q(x), \quad \Gamma_q(1) = 1.$$

q^x を t とおけば q-ガンマ関数は次の方程式の解である．

$$y_1 = \frac{1-t}{1-q}y \quad (\alpha = \frac{1-t}{1-q}, \beta = 0).$$

ただし，この差分方程式の変換作用素は t を qt にするものである．Koornwinder によると，$\Gamma_q(x+1)$ は $x \neq -1, -2, \ldots$ で $q \to 1^-$ とすると $\Gamma(x+1)$ に収束する．このことは q-ガンマ関数がガンマ関数の q-類似とされる理由の一つであろう．t を qt, $q \in \mathbb{C}^\times$ にする変換作用素による差分方程式は特に q-差分方程式と呼ばれる．

最後の例は z を z^2 にする変換作用素である．関数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ は Mahler 関数と呼ばれ，Mahler により $0 < |\alpha| < 1$ をみたす任意の代数的数 α に対して $f(\alpha)$ は超越数になることが証明されている．Mahler 関数は $f(z^2) = f(z) - z$ をみたす．

差分方程式の可解性の定義をみる前に，次の差分方程式を使ってその考え方に触れておく．変換作用素 $x \mapsto x+1$ による差分方程式

$$y_2 - y_1 - x^2 y = 0 \tag{1}$$

は $y_1 = \alpha y + \beta$, $\alpha \neq 0$ の形の差分方程式 2 つに還元できる．実際，解 f は

$$f_2 - (x+1)f_1 = -xf_1 + x^2 f, \quad f_i = f(x+i)$$

をみたすから，$g = f_1 - xf$ とおくと g は $y_1 = -xy$ の解で，f は $y_1 = xy + g$ の解である．ここで後者の方程式の係数体は g が含まれるように拡大されている．

Franke は Liouville-Franke 拡大（LFE）を用いて線形差分方程式の可解性の理論を構築した．線形斉次差分方程式が可解であるとは，基本解が LFE に含まれることである．LFE は Liouville 拡大の差分類似として Franke により定義された．Liouville 拡大は微分に関する原始関数，対数微分に関する原始関数，および係数体上代数的な元を有限個付け加えることで得られる微分体の拡大である．係数体は方程式 (1) に対する議論のように順次拡大される．一方 LFE はある共通の自然数 k に対して $y_k = y + \beta$ の解と $y_k = \alpha y$, $\alpha \neq 0$ の解，係数体上代数的な元有限個で生成される差分体の拡大である．こちらも係数体は順次拡大される．また，差分体とは変換作用素を付加した体のことである．例えば $y_1 = \alpha y + \beta$, $\alpha \neq 0$ の解は LFE に属する．従って上記方程式 (1) は可解である．

微分の場合，Airy 方程式は可解でないことが知られている．ガンマ関数と同様 Airy 関数にも q-類似が提示されており，それは $y_2 + qty_1 - y = 0$ という線形斉次 q-差分方程式をみたす．これを q-Airy 方程式と呼ぼう．筆者は差分 Riccati 方程式の可解性に関する一般理論を構築し，超越数 q に対して q-Airy 方程式が可解でないことを示した．$f \neq 0$ を q-Airy 方程式の解とすると

$g = f_1/f$ は次の q-差分 Riccati 方程式をみたす．

$$y_1 = \frac{-qty+1}{y}. \tag{2}$$

可解性に直接関係する主要結果は次のものである．つまり，任意回数の逐次代入により線形化されない差分 Riccati 方程式が LFE に属す解を持つならば，ある回数逐次代入を行って得られる差分方程式は代数解を持つ．差分 Riccati 方程式は一次分数変換とみなせることに注意．

次に差分方程式の既約性に関して得られた結果を紹介する．差分 Riccati 方程式 (2) の解は $a = q$ とした $A_6^{(1)}$ 型 q-Painlevé 方程式

$$q\text{-}P(A_6):\quad (y_2 y_1 - 1)(y_1 y - 1)(y_1 + qt) = aq^2 t^2 y_1$$

をみたす．q-$P(A_6)$ は Painlevé II 型常微分方程式の q-類似であるとされており，それゆえに q-P_{II} とも呼ばれる．代数的単数でない q に対して，この方程式の分解可能拡大に属す解は方程式 (2) の解で有理的に表されることを示した．分解可能拡大は線形差分方程式の解や 1 階代数的差分方程式の解，係数体上代数的な元などにより生成される差分体の拡大である．Painlevé II 型常微分方程式について同様の議論が野海と岡本によりなされている．

微分方程式または差分方程式に関するこの種の研究は既約性の研究と呼ばれている．梅村は Painlevé の既約性に対して関数集合の拡大操作により解析的意味付けを与えた．その拡大操作は微分代数の言葉で言えば Kolchin の強正規拡大と代数拡大の有限連鎖である．Bialynicki-Birula が強正規拡大の一般化を行ったが，それは差分の場合を含むものであった．Bialynicki-Birula の強正規拡大と代数拡大の有限連鎖は筆者の定義した差分体の分解可能拡大の一例である．

q-$P(A_6)$ の他に $A_7^{(1)\prime}$ 型 q-Painlevé 方程式と 2 種の双有理型代数的差分方程式の既約性を研究した．$A_7^{(1)\prime}$ 型 q-Painlevé 方程式とは次の連立方程式である．

$$q\text{-}P(A_7'):\quad \begin{cases} y_1 y = z_1^2, \\ z_1 z = \dfrac{y(1-ty)}{t(y-1)}. \end{cases}$$

q が 1 の巾根でないとき，q-$P(A_7')$ の分解可能拡大に属す解を $(y,z) = (f,g)$ とすると，f と g はそれぞれ $c/\sqrt{t}$, $c \in \mathbb{C}$ という形の代数関数である．また 2 種の双有理型代数的差分方程式

$$y_2 y = \frac{A(y_1)}{B(y_1)}, \quad \max\{\deg A, \deg B\} > 2,$$

$$\begin{cases} y_1 y = \dfrac{A(z)}{B(z)}, \\ z_1 z = \dfrac{C(y_1)}{D(y_1)}, \end{cases} \qquad \max\{\deg A, \deg B\} \cdot \max\{\deg C, \deg D\} > 4$$

の超越関数解は，どのような分解可能拡大にも属さない．ここで，A, B, C, D は多項式である．