論文審査の結果の要旨

氏　名　　西　岡　斉　治

Picard-Vessiot 理論をはじめとする微分代数の理論を、代数的微分方程式の解法理論に応用するという取り組みが一定の成果をおさめており、当然、代数的差分方程式の研究に同様の方法が使えないかという試みは行われている。たとえば、Franke の線型差分方程式の可解性の研究や、Singer, Van der Put らの線型方程式の Picard-Vessiot 理論などがそれにあたるのだが、これら既存の結果はいずれも線型方程式の理論で、西岡氏の非線型差分方程式への差分代数の応用は、新しい分野を切り開くものとなっている。

提出論文は、差分体の拡大の理論、およびいくつかの線型あるいは非線型の差分方程式への応用を含んでいる。これをまとめると、以下のようになる。（正確には、パラメーターq の超越性などの仮定が必要だが、煩雑になるので、この要旨では仮定について詳しく述べない。）

１．差分 Riccati 方程式の可解性のための条件を与え、その応用として q-Airy 方程式、q-Bessel 方程式の非可解性を証明した。

２．差分体における分解可能拡大を定義し、その性質に関する理論を整備した。

３．A7’型の q 差分パンルヴェ方程式の代数関数解の分類を与え、それ以外の場合の既約性を証明した。

４．A6 型の q 差分パンルヴェ方程式の代数関数解の非存在を証明し、知られている q-Airy 方程式の解でかけるものをのぞくと既約であることを証明した。

５．ある種の双有理型代数的差分方程式の既約性に関する一般的定理を示した。

ここで、可解とは、基礎体に対してある解を添加した差分体を考えたとき、その差分体を含む Liouville-Franke 拡大体が存在することを意味し、既約とは、そのような分解可能拡大体が存在しないことを意味する。Liouvill-Franke 拡大は、微分体の理論における Liouville 拡大の差分体における対応物で、Franke によって定義された。これは、Liouville 拡大が、初等関数から不定積分を許した操作で作られる関数で構成されるのと同様、かなり限られた関数のクラスに対応している。一方で、西岡氏の定義した分解可能拡大は、線型差分方程式の解を全て含むような広いクラスの関数に対応している。

既約性定理の証明は、ふたつの理論を組み合わせて示されている。ひとつは、分解可能拡大体における一般論で、もうひとつは代数関数解の存在に関する理論である。このうち、西岡氏の示した分解可能拡大体に関する理論のほうは、２階の代数的差分方程式に広く応用が可能で、これを用いるとある種の判定法によって、代数拡大の中に解を持つ可能性をのぞいて既約性を示すことができる。代数関数解の存在、非存在は、方程式

を個別に解析する必要があり、難しい問題である。西岡氏は、Hankel 行列式の離散付値をみることで差分方程式の有理解の非存在を示すという有効な方法を開発し、この論文で A6 型 q 差分パンルヴェ方程式の代数関数解の非存在を証明した。

これらの結果のうち主要な部分は、対象とする方程式の解がより簡単な方程式の解に帰着できるかどうかを判定するという問題意識の上に行われたものだが、一般論がすでにあってそれを応用しているというわけではなく、一般論の構築も同時に行っているわけだから、研究成果の価値は非常に高い。

よって論文提出者　西岡　斉治　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があるものと認める。