論文の内容の要旨

論文題目　Stronger LP Bounds for Formula Size Lower Bounds
（論理式サイズ下界に対する強化線形計画限界）

氏名　上野　賢哉

論理式サイズ下界の証明は，計算理論において最も本質的かつ重要な問題のうちの一つである．多項式サイズの論理式で計算できる言語のクラスは NC^1 と呼ばれる計算量クラスと等価であるため，例えば，計算量クラス P に属する論理関数に対して，その超多項式下界を証明することで $NC^1 \neq P$ といった結論が得られる．その証明技術に関しては，古典的な手法である Khrapchenko による 1971 年の結果をはじめとして長年多くの研究者により研究されてきた一方でその解決には程遠い．

Karchmer, Kushilevitz and Nisan は，論理式サイズ下界の問題から導出されるある整数計画問題として定式化し，それを線形緩和することで得られる定式化の双対問題に対して実行可能解を与えることで論理式サイズ下界を証明する一般的技術，線形計画限界を導入した．近年，この線形計画限界が多くの既存の証明手法を包括することが明らかにされてきた．本論文では，この線形計画限界に対する三通りの方法による拡張版を導入する．

一つ目の方法では，安定集合多面体の理論に基づきクリーク制約式という新しい制約条件を導入することで行われる．この新しい技法を多数決関数に適用することで，Khrapchenko による古典的結果から論理式サイズの下界を改良する．さらに，単調自己双対論理関数の分解理論からの動機付けにより非平衡再帰 3 分多数決関数の概念を導入し，それらの論理式サイズの整数的に最適な上限と下限を示す．また，平衡再帰 3 分多数決関数の単調論理式サイズに対して Laplante, Lee and Szegedy の量子敵対者限界により得られた値より改良された下界を示す．

二つ目の方法では，体系的に線計画問題の制約条件をきつくする制約式を導入する方法である，Lift-and-Project 法を利用する．複数ある方法の中で，その相対的な簡潔さと強力さから本論文では Sherali and Adams の方法を採用する．この手法により，最終的に整数解の凸包を表現する LP 定式化が得られる．したがって，原理的には整数計画問題の最適解と同等の値を証明する能力を秘めた証明手法を提案したことになる．

三つ目の方法では，Hrube¥v{s}, Jukna, Kulikov and Pudl{¥'a}k により最近導入された劣加法的長方形尺度という概念から，整数計画問題を介さずに直接に論理式サイズの下界となる線形計画定式化を導入する．この方法では，おおもとの線形計画限界の純粋な拡張でありながら，整数計画問題の最適解を破れることを示す．一般に,整数計画問題の最適解は論理式サイズから大きくは離れていないことから,この結果は新しい技術の強い潜在能力を示唆する.したがって，強い論理式サイズ下界へ向けて有望な方向性を提示するものである．さらに，万能関係と呼ばれる全ての論理関数を包括する数理構造に対して下界を与える解空間を構成することで，任意の論理関数への下界をそのまま得ることができる．本論文では，その最適下界へ向けた解空間の構造を議論する．