# 審査の結果の要旨

氏名　佐々木 智丈

近年、量子通信や量子情報処理への期待が高まり、その実用化に向けて様々な研究が盛んに行われている。その実現には、望みの量子状態の生成や保持に関する技術の確立が不可欠であり、量子制御の進展に期待するところは大きい。しかし、量子システムの動的挙動は古典的な物理系と大きく異なり、それに適したシステム理論を新たに構築し、それに基づいた解析・設計手法を確立していく必要がある。

本論文は「Differential Geometric Analysis for Dynamic Systems with Matrix-Valued States and Its Applications to Controlled Quantum Systems（行列値状態を持つ動的システムに対する微分幾何的解析とその量子制御系への応用）」と題し、全7章と付録A，Bから構成されている。「行列値状態を持つ動的システム」という新しい動的システムのクラスを提案し、その微分幾何的解析の理論を構築し、解析のためのツールを導出した後、それらの理論的結果を不完全連続測定下の量子制御系の解析に適用し、可到達性に関する新たな知見を得ている。

第1章「Introduction」では、本論文の背景と動機を述べた後、本論文の目的が行列値状態を持つ動的システムの基礎理論の構築と不完全連続測定下の量子制御系の解析にあることを説明している。

第2章「Dynamic Systems with Matrix-Valued States」では、行列値状態を持つ動的システムを定式化し、量子開放系、連続測定下の量子制御系、剛体系の3つの物理系がこの枠内で取り扱えることを示している。特に、連続測定下の量子制御系については、①量子フィルタリング理論による確率マスター方程式の導出し、②確率マスター方程式を直接扱うのではなく、それを等価変換した対応する行列値状態を持つ動的システムの枠内で扱うことにより、微分幾何的な取り扱いが容易になることを示している。

第3章「Differential Geometry and Calculus」では、本論文で重要な役割を果たす微分幾何学の基礎事項について説明した後、状態空間$X$n（$n\times n$エルミート行列全体の集合$H$nと$n\times n$実行列全体の集合$M$n(R)の統一的記法）上での微分幾何学と解析学を展開している。特に重要な概念として、行列関数のリー積、行列関数のリー微分、行列関数の方向微分および行列関数のフレシェ微分とその共役作用素を定義し、連続測定下の量子制御系の解析で公式として活用される結果を導いている。

第4章「Differential Geometric Analysis for Dynamic Systems with Matrix-Valued States」では、行列値状態を持つ動的システムに対して、可到達集合、可到達・強可到達ディストリビューション等を定義し、可到達性解析の基礎的結果を得ている。また、見通しの良い可到達性解析を可能にするツールとして、行列関数のリー積の方向微分を用いた計算法を導出し、可観測性解析の理論の展開によるツールも提案している。最後に、剛体系の解析に以上の結果を適用し、提案手法の有効性を確認している。

第 5 章「Accessibility Analysis for Controlled Quantum Systems Under Continuous Quantum Measurement」では、第 3 章と第 4 章で構築した理論および導出したツールを用いて、連続測定下の量子制御系の解析を行っている。具体的には、測定作用素がある条件を満たすとき連続測定による状態変化の自由度が極めて小さいことを示し、測定作用素と制御ハミルトニアンがある関係式を満たすとき制御入力の効果が極めて小さいことを示している。これらの結果は、測定効率 1 未満でも成り立つ性質であり、現実的な状況を考える上で重要な意味を有しており、またアクチュエータの設計指針を与えるという工学的意義を持っている。

第 6 章「Further Generalization」では、行列値状態を持つ動的システムの本質的な部分を抽出、一般化し、「実アファイン空間を状態空間とする動的システム」を定式化している。具体的には、このクラスのシステムに対する微分幾何的解析のツールとして、リー積の方向微分を用いた計算法、リー微分の方向微分およびフレシェ微分の共役作用素を用いた計算法（定理 6.4.1）を導出しており、量子制御系以外の物理系への応用が期待できる。

第7章「Conclusion」では、本論文のまとめを行うとともに、今後の研究課題について述べている。

以上を要するに、本論文は「行列値状態を持つ動的システム」という新しい動的システムのクラスを提案し、その微分幾何的解析の理論を構築し、解析のためのツールを導出したもので、独創性の高い研究である。また、それらの理論的結果を不完全連続測定下の量子制御系の解析に適用し、可到達性に関する新たな知見を得ており、工学上貢献するところ大である。よって本論文は、博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。