論文内容の要旨

論文題目: Asymptotic Analysis for Stochastic Volatility
(和訳): 確率的ボラティリティの漸近解析

氏名: 深澤 正彰

確率的ボラティリティとは, 数理ファイナンスにおける資産価格過程のモデリングにおいて導入された概念で, 確率 (的) ボラティリティ (変動) モデルと呼ばれるクラスは, その柔軟性により市場データにおける多くの経験則を再現する一方, 少数の特殊なケースを除いて陽に解析することが難しいことで知られている. それは Black-Scholes モデルの自然な拡張であるが, そこで得られていた尤度, オプション価格, ヘッジ戦略などについての明示的表現はもはや期待できない. 本論文ではこの確率的ボラティリティにまつわる幾つかの問題を漸近論的手法により解析する. 一般的なモデルに対して, 各種の問題に応じた適切な漸近論 (または摂動論) の枠組に載せることで, 陽には追跡できなかったモデルの特性や, またそのモデルをデータ解析に当てはめるための実用的な手法を導くことができる.

第一章では連続セミマルチンゲールの二次変動に対する中心極限定理を証明する. この研究は高頻度に観測された資産価格データから累積ボラティリティを推定する問題に動機付けられている. 連続セミマルチンゲール X と時刻分割列

$$\tau^n : 0 = \tau^n_0 < \tau^n_1 < \cdots < \tau^n_j < \ldots, \quad \tau^n_j \to \infty \ \ (\text{ as } j \to \infty)$$

に関する二次変動

$$((X))_2[\tau^n]_t = \sum_{j=0}^{\infty} (X_{\tau^n_{j+1}\wedge t} - X_{\tau^n_j \wedge t})^2$$

に対して, 確率解析における基本的な事実として, サンプリング間隔 $\tau^n_{j+1} - \tau^n_j$ が $n \to \infty$ で広義一様に 0 に収束するとき,

$$((X))_2[\tau^n]_t \to \langle X \rangle_t$$

なる確率収束が知られている. この 0 次の収束 (大数の法則) は τ^n の構造に依存しない一方, 1 次の漸近分布 (中心極限定理) は τ^n の漸近構造に依存することが知られている. その結果は τ^n が X と (条件付) 独立な場合に

J. Jacod によって 1990 年代に与えられたが, より一般の停止時刻列への拡張は未解決な問題であった. 第一章における主要な結果は, 増分 $X_{\tau^n_{j+1}} - X_{\tau^n_j}$ の条件付モーメントの構造によって定まる, ある減少列 ϵ_n と適合過程 b, c に対して

$$\epsilon_n^{-1}(((X))_2[\tau^n] - \langle X \rangle) \to \frac{2}{3} b \cdot X + \sqrt{\frac{2}{3}} c \cdot X'$$

なる $C[0,\infty)$ 上の安定収束を主張するものである. ここで X' は, ある独立な Brown 運動 W の $\langle X \rangle$ による時刻変更として定義される. この二次変動の極限分布は確率微分方程式の Euler-丸山近似の誤差分布と密接に関連している. 主結果の応用として, 通常の時間離散化による Euler-丸山近似法よりも誤差漸近分散を小さくするような離散化スキームを構成する.

第二章は第一章より僅かに強い仮定の下, 第一章の結果を拡張するものである. ここでは確率積分とそのリーマン積分近似の誤差

$$Z^n_t = \int_0^t X_s dY_s - \sum_{j=1}^{\infty} X_{\tau^n_j}(Y_{\tau^n_{j+1}\wedge t} - Y_{\tau^n_j \wedge t})$$

の漸近分布を導く. ここで X, Y は連続セミマルチンゲールであり, $X = Y$ のケースが前章に対応する. 主結果は

$$Z^n/\epsilon_n \to \frac{1}{3} b \cdot Y + \frac{1}{\sqrt{6}} c \cdot Y'$$

なる $C[0,\infty)$ 上の安定収束を主張する. ここで Y' は, ある独立な Brown 運動 W の $\langle Y \rangle$ による時刻変更として定義される. また誤差漸近分散の, 分割列 τ^n に依らない下界とそれを達成する分割列も構成する. このような結果はセミマルチンゲールを現象のモデルとして扱う際, 普遍的に重要な役割を果たすことが期待できるが, 特に確率ボラティリティモデルの枠組では, 高頻度データに基づく推定関数の漸近挙動の解析に本質的な役割を果たす. また与えられた連続時間の (優) ヘッジ戦略に対し, それを離散近似した場合のヘッジ誤差を評価するものでもある. この章では応用として特に取引費用を勘案した最適デルタヘッジ戦略を構成する. 第一章・第二章で与えられる結果は Black-Scholes モデルに限定しても新しいものであり, 連続時間モデルに基づく理論と, 離散的な取引・データで構成される現実とのギャップを漸近論により橋渡ししていると言える.

第三章では確率ボラティリティモデルの特異摂動展開を考える. これは 2000 年前後に Fouque らによって導入された高速平均回帰 (fast mean reverting) モデルを拡張するものである. 資産価格過程 S_t に対して, 摂動パラメータ ϵ が入った確率微分方程式

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \varphi(X_t)dW_t + \psi(X_t)dW'_t), \\ dX_t &= \epsilon^{-1} b_\epsilon(X_t)dt + \epsilon^{-1/2} c(X_t)dW_t \end{aligned}$$

を仮定し, $\epsilon \to 0$ の極限における S_T の分布の漸近展開を与える. これから特にヨーロッパ型オプション価格の, Black-Scholes 価格周りの漸近展開公式が導かれる. Fouque らの先行研究では偏微分方程式の摂動により, X が OU 過程の場合にその展開の正当性が証明されている. 一方ここでは著者の, エルゴード的拡散過程に対するエッジワース展開についての先行結果を拡張して, この問題に適用する. エルゴード性についての弱い仮定の下, 広いクラスの一次元拡散過程 X に対して漸近展開の正当性が証明される.

第四章ではマルコフ型とは限らない, しかも飛躍を持つ確率ボラティリティモデルに対して, 可積分性と分布の非退化性の仮定の下, より一般の摂動展開の正当性を, マルチンゲール展開に対する Yoshida の公式に基づき証明する. 第三章・第四章で系として得られるインプライドボラティリティの展開公式は, その驚くほどの簡明さにもかかわらず, ボラティリティスキューやボラティリティの期間構造を確率的ボラティリティと資産価格過程との漸近的相関構造の効果として再現している. この最後の二章は相補的に, 確率ボラティリティモデルの Black-Scholes モデル周りの摂動展開に関する多くの既存結果を確率論的手法により拡張している.