論文審査の結果の要旨

氏　名　今　井　直　毅

本論文は、局所体の Galois 表現の有限平坦モデルのモジュライ空間について、その連結性、次元、ゼータ関数などの、幾何的、数論的性質を調べたものである。中でも連結性について Kisin による予想を肯定的に解決し、応用として大域体の Galois 表現の保形性について R=T とよばれる型の結果を導いている。

Galois 表現の変形環は、Wiles による Fermat 予想の証明の中で決定的な役割を果たして以来、数論の重要な対象として活発に研究されている。Galois 表現の保形性は Langlands 対応のかなめであるが、その変形環に対し R=T とよばれる性質を示すことで、保形性を証明できるようになった。さらに、この方法の Kisin による改良以降、局所体の Galois 表現の変形環の整域性が証明の急所であることが明らかになり、有限平坦モデルを用いて得られる変形環のスペクトルの改変は、この整域性の証明の有効な手段として用いられている。

一般に、変形環はそれ自体の環論的な考察は困難である。しかし、局所体上の Galois 表現を群スキームと同一視すると、その整数環上の有限平坦モデルのモジュライ空間として、その変形環のスペクトルの改変が得られる。そしてこのモジュライ空間は、整数環上の有限平坦群スキームに対応するフィルトレイション付き加群を考えることで、線形代数的に扱うことができ、ここから変形環の環論的性質を導くことが可能となる。

本論文では、局所体上の 2 次元 Galois 表現について、この変形環のスペクトルの改変、とくにその中心ファイバーについて、その幾何的、数論的性質を詳細に調べたものである。詳しく言うと、多少不正確な表現ではあるが、変形のうちで標数 0 にもちあげたときに Hodge フィルトレイションがちょうど全体の半分になるという条件に対応する部分のモジュライ空間を扱っている。この部分は、対応する Hilbert 保形形式でいえば重さが平行な部分にあたり、Galois 表現への応用上もっとも重要な部分である。

このモジュライ空間は通常群スキームのモジュライと非通常群スキームのモジュライの無縁和に分解し、さらに通常群スキームのモジュライは非常に簡明である。非通常群スキームのモジュライについては、Kisin が局所体の剰余体が素体の場合にその連結性を示しており、一般にも連結であることを予想した。剰余体が素体でない場合には、Gee が、Galois 表現が自明という仮定の下に、この連結性の予想を証明し、Galois 表現の保形性もちあげ定理を証明している。

本論文の主定理では、この Kisin と Gee の方法を精密化することで、Kisin の予想した連結性を証明している。この方法は有限平坦群スキームにともなう Kisin 加群を、行列をもちいて具体的に記述し、モジュライの各点が射影直線の鎖で結べることを示す

というものである。従来示されていた場合と異なり、ここでは係数環と剰余体のテンソル積が直積分解するため扱う線形代数的対象が複雑になり、込み入った議論のくり返しとなるが、それを手際よく処理することで上記の結果を導いている。これは世界的にも高く評価される業績であり、論文のこの部分は、すでに American Journal of Mathematics に掲載が決定している。このほか、上記のモジュライ空間に対し、その次元のシャープな評価、合同ゼータ関数の決定など興味深い結果を証明している。

本論文で得られた結果は、局所体の Galois 表現の有限平坦モデルのモジュライ空間という、Galois 表現の保形性という整数論の重要な問題と深く結びついた対象に対し、その連結性の予想を証明するという、高く評価できるものである。よって、論文提出者今井直毅は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。