論文内容の要旨

平成22年11月18日

論文題目：General Valuation Techniques for Complex Contingent Claims: Applications to Long-term Cross-Currency Derivatives
（複雑な条件付き請求権に対する一般的な評価法：長期為替デリバティブへの応用）

氏名：竹原　浩太

本論文では，条件付き請求権の価格付けに対する「漸近展開法」を用いた近似手法に対して，その適用範囲を拡大し近似精度を改善する新たな枠組み（“Hybrid Scheme”）の提案・高次展開に必要となる新計算手法の開発を通じて，徐々に認識されつつあった応用上の限界を克服し今日の金融実務の重要課題を解決するに足る有効性・汎用性を与えた．またこの結果の応用例として，今日の実務において大変重要であるものの他の手法ではその扱いが大変困難である，「Libor Market Model 下での長期通貨オプションの価格評価」に対する複数の解析近似解を与えその精度や有効性を確認した．こうした結果が一部金融機関において既に実装されていることは，その重要性を示す一例であろう．

昨今の金融市場においては，次のような現象・特色が観察される：i) まず，特にリーマン・ショック前後の為替市場に象徴されるように，市場の変動性は時に非常に大きくなる．このような市場環境下では，原資産過程だけでなくそのボラティリティの確率的な動きを表現する Stochastic Volatility Model や，非連続的変動を表現できる Jump Model 等を使用することが不可欠であるこ

とは容易に想像できるだろう．ii) また，ハイブリッド証券 (Hybrid Securities) と呼ばれる，ペイオフが株価と金利，為替レートと商品（Commodity）価格等，複数の変数に依存する証券が日常的に取引されるようになっている．こうした証券の価格評価やリスク管理においては，当然複数の変数の確率的挙動を同時に考えなければならない．iii) さらに，長い満期を持つ金融派生証券の流動性が高まっていることも大きな特徴といえる．証券の持つ満期が長くなるに従い，金利の変動の影響がより大きくなってくることはよく知られた事実であるので，こうした長期の問題を考える際には対象となる（株価などの）変数だけでなく，金利の確率的変動をとらえることが不可欠となる．

以上のようなことから，昨今の金融市場環境を適切にモデル化するためには，(特に長い満期を持つ証券を念頭に置けば）金利や確率的ボラティリティ，また時に Jump 項を含むような一般的（かつしばしば高次元の）モデルを用いる必要があることがわかる．さらに，極端な skew/smile を持つ Implied Volatility Surface にモデルをフィットさせるためには，できるだけ各変数の相関構造やモデルの形状に強い仮定を置かずに評価ができることが望ましい．

こうした問題の最たる例が，「Libor Market Model(LMM) 下での長期通貨オプションの価格評価」である．通貨オプションは全ての Cross-Currency デリバティブの基本となる最も重要なプロダクトである一方で，扱う際に，i) 長期間に渡って，ii) 国内外金利，為替レート，そのボラティリティといった数十次元の変数の確率的挙動を同時に考察する必要がある．これはその重要性と解決の困難さの双方の面において今日の金融実務における課題の象徴的な例であると言えるため，本稿で提案される手法の有効性を確かめる具体例としてこの問題を取り上げることにした．

一般にこうした複雑なモデル下で派生証券の真の価格を解析解（閉じた解）の形で得ることは，大変困難である．そこでこうした問題に対しては，偏微分方程式の差分解法や Monte Calro シミュレーション等の数値的手法を用いて近似的な解を求めることが一般的であるが，こうした数値的手法では「瞬時に」価格解を求めることは通常困難である．

一方で，実務的な観点からは非常に高速な計算が求められることが多い．例えば，トレーディングに活用するためには当該証券の価格をその場で瞬時に求める必要があるし，リスク管理や他の Exotic Derivatives の評価に重要となる"calibration"を行う場合，同じ価格式をパラメータを微小に変化させつつ何度も再計算してフィットさせていくため，価格式の計算速度が非常に重要になる．

こうした点を踏まえると，実務的観点からは高速に計算が可能な手法，特に数値的解法と比較して圧倒的な計算速度を誇る解析的な解法が強く望まれていることがわかる．ただし真の価格を解析的に求めることは通常非常に困難であるため，現実的には精度の高い解析近似解を求めることが目標となる．ところが，こうした複雑かつ高次元のモデルについて，その形状や相関構造に強い仮定を置くことなしに精度の高い解析近似解を得ることが可能な手法は，実は非常に限られたものしかない．

こうした要望に対して有効な数少ない手法の一つが，「漸近展開法」と呼ばれる

手法である．本手法は Kunitomo and Takahashi[1992], Takahashi[1995,1999], Yoshida[1992a,b] らによってその標準的枠組みを確立された手法であり，その特長として i) 幅広い問題に対して適用可能であること，ii) 解析的に扱いやすい近似解が得られること，及び iii) 数学的に厳密に正当化される理論であること，等が挙げられる．このためこれまでファイナンスに関する数多くの分野・問題に応用されてきた．本稿でも前述の「LMM 下での長期通貨オプションの価格評価」について，「漸近展開法」の標準的枠組みを応用し（3 次までの展開を行って）解析近似解を得たが，変動性が比較的大きい状況を念頭に置いたパラメータや 10 年以上の満期を設定した場合，必ずしも十分な精度を確認することができなかった．近似精度を向上させるためには展開の次数を上げることが有効である場合が多いが，「漸近展開法」ではその高次の展開の表現が与えられているにも関わらず具体的な評価法が未整備でありこれまで実用上は計算ができなかった．また標準的な枠組みは，そもそも短期の skew を再現するのに重要となる Jump 項を近似精度を維持しつつ導入することが難しいという問題も抱えている．

そこで本稿では，Jump 項をも含むより幅広いモデルにその適用可能範囲を広げつつ解析近似解の精度を向上させることを目的として，以下の 4 つの観点から「漸近展開法」の応用手法の工夫・改良を試みた．

まず最も基礎的な部分として，モデル自体に工夫を加えることを考えた．具体的には，Affine クラスと呼ばれるモデルを確率的ボラティリティ及び Jump 項に導入した．これらのモデルは，金利が確定的な場合についてはその特性関数が陽に知られており，この特性関数を Fourier 逆変換することで価格解も（準）解析的に得ることができる．こうした既知の結果を利用するため，金利部分と為替レート及びそのボラティリティが独立であるという「独立性の仮定」を置き，金利部分にのみ漸近展開法を適用して，得られた特性関数を Fourier 逆変換することにより解析近似解を得た．この方法で得られた近似解は，10 年の満期を持つ例においても高い精度を示した．ただその一方で，強い skew が観測された市場への calibration では，「独立性の仮定」やボラティリティを Affine クラスに限定するという制約のために，満足なフィットが得られなかったりパラメータの妥当性・安定性を欠く例も見られた．

そこで次に，Fourier 変換法を用いつつこれらの制約を取り除くことで，より幅広いモデルの利用を可能にすることを考えた．この場合，前段のようなモデルを含みつつ，必ずしも Affine クラスに含まれない確率的ボラティリティ項・各変数間の複雑な相関構造・さらにはある種の Jump 項を持つような非常に一般的なモデルを考察することが可能となる（前述のとおり，こうしたモデル下での解析的評価は他の手法では大変困難である）．さらに，ある測度変換及び変数変換を組み合わせることにより，結果として生じる展開の中心分布を変形し精度のさらなる改善を達成した．本稿ではこれを"Hybrid Scheme" と呼ぶ．

さらに，「特性関数ベースの (Ch.f.-based)Monte Carlo シミュレーション」を提案し，ここにさらに制御変量として「漸近展開法」を利用することで分散減少に役立て，最大でシミュレーションを 100 倍程度高速化することに成

功した．これにより，(例えば超長期等の）十分な精度を持つ解析近似解が得られないような場合においても,「漸近展開法」を利用してシミュレーションの高速化を図ることで実務上の要請に応えることができる．

こうした一連の流れは i)「漸近展開法」と他の手法・モデルの Fourier 逆変換法を利用した組み合わせや ii) 展開の中心となる分布の変形，による近似精度の改善，及び iii) シミュレーションの高速化による代替手段の提供と捉えることができる．

これに加え，iv)「漸近展開法」における近似の次数を上げることを試みた．上記の研究を含むこれまでの「漸近展開法」の応用研究においては，高々3 次までの展開のみが行われていた．この背景には，実際の評価において必要となるある種の Wiener 汎関数の条件付き期待値の具体的な計算方法が明らかにされていなかったことが一因にあると考えられる．これまでは既存の公式を用いることがほとんどであったが，これらの公式は 3 次までしか与えられておらず，それ以上高次の展開に必要な計算方法はこれまで明示されてはこなかった．

そこで本稿では，この条件付き期待値の計算方法を理論的に整理し，任意の次数まで初等的に計算可能な枠組みを新たに構築した．さらに，その成果として 4 次までの計算に必要な公式の導出を行った．

以上のように本稿では,「LMM 下での長期通貨オプションの価格評価」という実務上大変重要である一方他の手法では解析的評価が（近似ですら）困難である問題に通して，まず「漸近展開法」の標準的な枠組みを適用しその 3 次までの展開を行うことで近似精度の確認及び課題の把握を行った．その上でこれを出発点として，i)〜iii) の手法の構築により「漸近展開法」を Jump 項を含むより幅広いモデルに適用可能としつつ，低次（3 次まで）の展開を用いたままその精度を改善することに成功した．その一方で iv) で展開自体の次数を上げその評価を行う新手法を構築することで，i)〜iii) とは独立に（従って組み合わせることも可能）精度の改善を達成している．

これら成果は既に一部国内外金融機関により実装（もしくはその検討）が行われるなど，学界のみならず実務家からも高く評価を受けている．冒頭にも述べた通りこうした新たな枠組みや計算手法の開発により,「漸近展開法」は今日の金融市場においてもなお実用的に活用できる非常に有効な統一的近似手法としての地位を確立したと言えるであろう．