

論文内容の要旨

論文題目

New extensions in topological field theory
with instanton effects

(インスタントン効果を含む位相的場の理論における新しい拡張)

西山大輔

背景・動機

位相的場の理論は本来場の理論が持つ無限自由度や複雑な相互作用からくる困難を大幅に低減し、厳密な計算が可能なモデルとして活発に研究されている。位相的場の理論のうち、特にウィッテン型の位相的場の理論、またはコホモロジカルな場の理論と呼ばれるものは一般に、ある超対称な場の理論にトポロジカルツイストという操作を施すことで得られ、もとの超対称な場の理論の BPS セクターを記述することが知られている。いっぽう、コホモロジカルな場の理論はマタイ-キレン形式という幾何学的な定式化を持つ。この定式化によると、位相的場の理論の可観測量はインスタントンモジュライ空間上の閉微分形式と対応することが示され、相関関数が位相的な性質を持つことが自然に理解される。

Frenkel, Losev, Nekrasov はコホモロジカルな場の理論の一つである、位相的量子力学を考察した。彼らはそこに現れるあるパラメータ λ が無限大になる極限では、この位相的な理論に対応する理論である超対称量子力学について、その BPS セクターを超える範囲で相関関数の計算が可能なことを示した。そのような計算が可能になる理由は、この極限では、作用汎関数がインスタントンモジュライ空間に台を持つデルタ汎関数となるために、経路積分がこの空間からの寄与しか受けなくなるためである。ただし、この極限 $\lambda = \infty$ で理論は λ が有限の値を持つ領域とかけ離れたものになっているため、彼らの計算結果から直ちに λ が有限の値を持つ、もとの超対称量子力学の相関

関数の情報を得ることはできない。これを得るには $\lambda = \infty$ のまわりである種の摂動論を展開し、 λ が有限の値を持つ領域での相関関数を求めればよいと期待されるが、この摂動論は通常の量子力学における摂動論とは非常に異なる性質を持つことが示された。その性質からくる困難のために、彼らはこの摂動論を実行していない。

このような状況を踏まえ、本論文では以下の研究について議論を行う。

- 位相的量子力学における新しい可観測量を反復積分の方法を用いて構成する。
- 上に述べた $\lambda = \infty$ のまわりでの摂動論を実行する。

第1章においてこれらの研究の背景・動機を説明する。第2章において後の章で必要となる超対称量子力学の事項についてレビューを行う。第3章では位相的場の理論の一般的な性質を復習した後、マタイ-キレン形式を用いた位相的場の理論の定式化についてレビューする。第4章ではこの定式化を用いて位相的量子力学を構成するために必要となる、道の空間の幾何学についてレビューする。また、反復積分の方法により、道の空間の上の微分形式を構成できることを述べる。第5章で、これらの定式化により構成した位相的量子力学において、新しい可観測量の構成を行う。また、 $\lambda = \infty$ の極限における理論の概要をレビューする。第6章で $\lambda = \infty$ のまわりでの摂動論を実行する。第7章において、本論文のまとめを行う。

本論文で新たに行なった研究の概要は以下のとおりである。

新しい可観測量

位相的量子力学をマタイ-キレン形式を用いて定式化すると、そのインスタントンモジュライ空間は、モース関数の勾配曲線が作る空間であることが示される。これは両端をモース関数の臨界点に持つ道の空間の部分空間である。したがって、道の空間の上の閉微分形式はトポロジカルな量子力学の可観測量に対応する。本論文では反復積分の方法を用いて、そのような微分形式、したがって可観測量を構成する。こうしてできる可観測量はモジュライ空間の基本群の非可換性に関する情報を引き出すことができる。つまり、これを考えることで、モジュライ空間の幾何学に関する新しい情報を見ることができる。モジュライ空間が非可換な基本群を持つ例として種数2のリーマン面を標的空間に持つトポロジカルな量子力学を考察し、この新しい可観測量を含む相関関数を計算する。

$\lambda = \infty$ のまわりでの摂動論

Frenkel, Losev, Nekrasov の考察に基づいて、 $X = \mathbb{CP}^1$ を標的空間にもつ量子力学について、 $\lambda = \infty$ のまわりでハミルトニアン固有値を求めるための摂動論を行う。ハミルトニアンは

$$H = H_0 + \frac{1}{\lambda} H_1$$

という形をとる。これに通常の量子力学の摂動論が適用できない理由は、非摂動ハミルトニアン H_0 がエルミートでなく、また、対角化すらもできないからである。この場合、通常のような固有値が λ^{-1} の整数べきで展開されるという仮定は正当化されない。本論文では、レゾルベントを用いたより一般の摂動論を用いることにより、この困難を避ける方法を示す。

結論

本論文により以下のような結果を得た。

- 位相的量子力学について、モジュライ空間の基本群の非可換性に関する情報を引き出す、新しい可観測量の構成法を示した。
- Frenkel, Losev, Nekrasov の方法を用いて超対称量子力学の BPS セクターを越える範囲で相関関数を計算するときに必要となる、通常とは異なった摂動論を実行する方法を示し、ハミルトニアンの固有値を摂動の 2 次のオーダーまで求めた。

これらの結果をより複雑な位相的場の理論に応用すれば、さらに興味深い結果が得られると期待される。