論文の内容の要旨

論文題目 Conformal Field Theory Analysis of Two Dimensional Disordered and Layered Loop Models
（共形場の理論による二次元の乱雑および層状ループ模型の解析）

氏　　名　島田 悠彦

臨界現象において観測される様々な universality class は、場の理論の空間に作用するくりこみ群変換における固定点と対応して理解される。さらに共形場の理論 (CFT) ではこれらの固定点が共形不変性を持つ場の理論に対応すると考える。共形不変性は二次元で強力な拘束条件として働くため、これまでにイジング模型の臨界点の一般化であるミニマルユニタリ模型という無限個の universality class に対応する場の理論が知られている。これらはビラソロ代数の縮退表現に基づいて構成され、格子模型としての定義は先験的には明らかではない。一方、$O(n)$ ループ模型はスピン系の高温展開に基づいて考案された

$$Z(x,n) = \sum_{\text{config. of loops}} x^{\#\text{bonds}} n^{\#\text{loops}},$$

という単純な分配関数を持つ模型である。ここで和は格子上のループ配位に関してとり、x と n はそれぞれボンドとループ 1 個あたりの重みである。ここでは格子模型としての定義が明確であり、$|n| < 2$ で x を調節して得られる臨界点が n という連続パラメーターをもつ CFT で記述されることが知られていた。またループに向きを付け、ループ配位から決まる高さ関数を導入することで汎関数ガウス積分に基づく経路積分と相性がよくなるというクーロンガス構成法があり、ミニマル模型とも密接に関係することが知られていた。

本論文では、微視的スケールにおけるクエンチ型の乱雑さをもつループ模型と、二層の構造をもちループ配位を投影してできる交点数に応じた重みを課したループ模型を導入してその臨界点を解析した。前者の模型はボンドの重み x が何らかの確率分布に従うと考え、空間の各点ごとにきまる独立な確率変数とすることで定義した。これまでクエンチ型の乱雑さを持つ模型の臨界点への解析的なアプローチとしては主に超対称性の方法があったが、

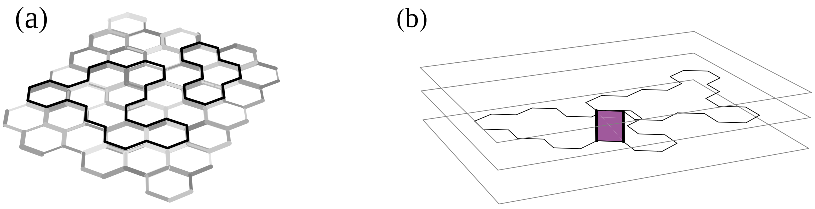

図 1　(a) 乱雑さのあるループ模型 (b) ボンドの重なりに重みを課した乱雑さのない多層ループ模型.

この方法では非自明な臨界指数あるいは複数の固定点間のクロスオーバーを起こす系が見つからないのが普通であった。これにたいし Ludwig がランダムボンド q 状態ポッツ模型にたいして用いた内部対称性を動かすアイデアを $O(n)$ 対称性にたいして実行すると、非自明な固定点を伴ったクロスオーバーの重要な一例が得られることがわかった。このとき n を連続変数として動かすこと、及びレプリカ法を用いて問題を乱雑さのない M 層のループ模型における $M \to 0$ 極限にマップすることが重要となる (図 1)。具体的にはボンドがくりこまれた姿であるエネルギー演算子を異なるレプリカ面間で結合させる項による摂動論として定式化できる。実際に one-loop ベータ関数を計算すると CFT のある構造定数が重要になり、乱雑模型の非自明な固定点はある $n_c \sim 0.2$ を境に $n_c < n < 1$ で得られることが示唆された。この構造定数は高分子極限 $n \to 0$ でループ要素同士が強く反発することに対応して $n = 0$ に極をもち、$n < n_c$ で支配的になるため、固定点は消失してしまう。この領域では、ループがレプリカ面内を動き回るよりも他の面とのあいだを縫うように行き来し束縛状態をなしていると考えられる。非自明な固定点におけるスピンのスケーリング次元を評価するには two-loop の計算が必要である。そこで Dotsenko-Fateev の 4 点相関関数の表示を含んだ摂動論における多重積分を評価するために、散乱振幅の形をもつ積分公式を導出した。結果としてこの乱雑模型の連続系列を特徴づけるスピン次元のずれの主要項に現れる比例係数が、体心立方格子上の酔歩における再帰回数を 2π で割ったものと一致していることがわかった。これは摂動計算による結果であるにもかかわらず、ループ模型が連続変数である n にたいして格子上で定義されることから、近年提案されたワームアルゴリズムによる数値計算により高精度で検証されることが期待される。

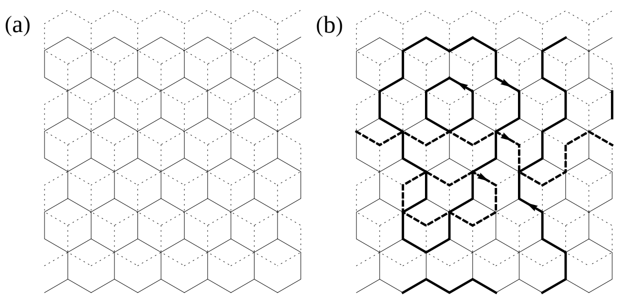

図 2　(a) 蜂の巣格子の AB スタッキング (b) 周期境界条件下の向きつきループ配位の一例.

次に解析した二層模型は、周期的境界条件をもつ蜂の巣格子を AB スタッキングとして知られる位置関係で積み、分配関数を向きをもったループ配位に関する和として与えることにより定義した (図 2)。層間の結合はループの符号付き交点数 1 個あたりの重みを $\lambda = \exp(i\theta)$ として決める。符号付き交点数はループの巻きつき数を並べてできる行列の行列式で与えられることを用いると、連続場の理論における有効層間相互作用項が得られる。これはトポロジカルな性質を持ち経路積分では局所揺らぎが分離するため、分配関数はループの巻きつき自由度による「トーラス結び目のペア」に関する総和となる。この分配関数では modular 不変性は自然に従うことがわかる。また、これを Möbius 反転公式を用いて operator content がわかる形に書き直した。この結果は明示的なので小さな次元の場の寄与に関しては実用的であるが、一般にはそれぞれ二つの分数電荷及び磁荷という量子数にたいする複雑な選択則を含んでおり簡単な形にまとめるのは難しい。そこで、交点の重み λ を連続的に変えていったときのスケーリング次元のフローをプロットして一般的な対称性を考察した結果、相互作用のない $\theta = 0$ の模型および相互作用のある $\theta = \pi$ の模型がスペクトルの曲線によって結ばれる双対な関係にあることがわかった。また具体的に、$\theta = \pi$ における二層 dilute $O(1)$ 模型と二層 dense $O(1)$ 模型という二つの模型が持つスケーリング次元の集合の直和をとると、超対称共形コセット模型 $\frac{\widehat{s\ell}(2)_2 \otimes \widehat{s\ell}(2)_2}{\widehat{s\ell}(2)_4}$ が持つスケーリング次元の集合と概ね一致することを観察した。このようにして連続パラメーター $|n| < 2$ にたいする二層模型の exact な分配関数が経路積分により計算され、乱雑模型を扱う際にレプリカ法で必要になる一般の多層模型を調べる上での手がかりを得ることができた。