論文の内容の要旨

Generators of modules in tropical geometry
(トロピカル幾何における加群の生成元)

吉冨 修平

トロピカル曲線は、実数トロピカル半体 $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ の上の幾何学的対象である。加法 $\oplus$ は実数体における最大値演算であり、乗法 $\odot$ は実数体の加法である。トロピカル曲線 C とその因子 D に対して、D のセクションの集合 $M = H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ には、以下のように定義された $\mathbb{T}$-加群の構造が入る。

$\mathbb{T}$-加群は半体上の加群として定義される。$(M, \oplus, \odot, -\infty)$ が $\mathbb{T}$-加群であるとは、$(M, \oplus, -\infty)$ がトロピカル半群であり、$\odot$ が $\mathbb{T}$ による M 上の加法的な半群作用であるということである。トロピカル半群とは、単位元を持つ可換半群で、任意の元 v がべき等条件 $v \oplus v = v$ をみたすもののことである。

$\mathbb{T}$-加群 M は体上の加群に類似している。部分集合 $S \subset M$ は、極小の生成系であるとき、基底であるといわれる。しかし、M の基底の元の個数は、M の位相的な次元に等しいとは限らない。私たちは、この論文の中で直進的な $\mathbb{T}$-加群というものを導入する。このクラスは、自由 $\mathbb{T}$-加群 $\mathbb{T}^n$ の、束を保つ部分加群の一般化である。ここで、束を保つ部分加群とは、$\mathbb{T}^n$ 上の自然な半順序関係に関して任意の二つの元の下限を保つ部分加群のことである。この論文の主定理は、M を自由 $\mathbb{T}$-加群 $\mathbb{T}^n$ の有限生成な直進的部分加群とするとき、M は n 個の元で生成されるというものである。

この定理には四つの系がある。半体 $\mathbb{T}$ は、準完備な全順序有理トロピカル半体 k というものに一般化される。第一の系として、私たちは k-加群の単射準同型の左逆射が存在するための十分条件を見つける。直進的で反射的な k-加群の次元というものは、基底の元の個数として定義される。第二の系として、私たちは直進的で反射的な k-加群の組 $M \subset N$ について不等式 $\dim(M) \leq \dim(N)$ を示す。第三の系として、私たちは有限生成で直進的で前反射的な k-加群は反射的であることを示す。第四の系として、私たちは k-加群の部分加群の有限性について考察する。

この結果は、トロピカル射影空間 $\mathbb{TP}^n$ の中の多面体に応用することができる。Joswig-Kulas によれば、$\mathbb{TP}^n$ の中の多面体のうち実凸であるものはトロピカル単体であり、したがって高々 $n+1$ 個の点のトロピカル凸包である。私たちはこの結果の一般化を示す。多面体 P は、対応する部分加群 $M \subset \mathbb{T}^{n+1}$ が直進的で反射的ならば、高々 $n+1$ 個の点のトロピカル凸包である。また、M は、P が実凸な多面体ならば、直進的で反射的である。

また、この結果はトロピカル曲線にも応用することができる。トロピカル曲線についての Riemann-Roch の定理が Gathmann-Kerber によって証明されている。この定理で述べられているのは、因子 D の不変量 $r(D)$ についての等式である。私たちは、$r(D)$ が加群 $M = H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ の不変量ではないということを確認して、不等式 $r(D) \leq \dim(M) - 1$ を示す。