# 論文審査の結果の要旨

氏名　　吉冨　修平

論文提出者　吉冨　修平氏は、この論文においてトロピカル加群の生成元に関する体系的な研究をおこなった。

抽象的な代数曲線に対応して抽象的なトロピカル曲線がある。トロピカル曲線 $C$ とその上の因子 $D$ が与えられると、大域切断の集合 $H^0(C,D)$ が定まる。これはトロピカル半体 $\mathbf{T}$ 上の加群、トロピカル加群になる。整数 $r(D)$ を、任意にとった $r$ 個の点 $P_1,\dots,P_r$ に対して、集合 $H^0(C,D-\sum P_i)$ が原点 $\{-\infty\}$ 以外の元を持つような $r$ の最大値として定義する。これは $H^0(C,D)$ の次元から 1 を引いたものを一般化した不変量であり、リーマンロッホの定理

$$r(D)-r(K_C-D)=\deg(D)+1-b_1(C)$$

が成立する。しかし $r(D)$ は抽象的な $\mathbf{T}$ 加群としての $H^0(C,D)$ から直接定まる量ではない。

そこで吉冨氏は抽象的な $\mathbf{T}$ 加群に関する基礎理論の研究を行った。ユークリッド空間内のコンパクト凸多面体に対しては、これまでに超平面配置の退化の研究（Postnikov, Stanley）や，トロピカル代数的な凸多面体の研究（Sturmfels など）がある。吉冨氏は、トロピカル加群に関する性質として、ストレート加群、反射的加群などの諸概念を新たに導入して、ユークリッド空間内の部分集合が通常の意味で凸であることと、トロピカル加群として凸であることの間の関係を解明した。

主要結果は以下のようなものである：

**定理 1.** $\mathbf{T}^{n+1}$ の有限生成部分加群 $M$ と対応するトロピカル射影空間 $\mathbf{TP}^n$ 内の多面体（有限個の点のトロピカル凸包）$P$ を考える。もしも $P$ が実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ 内の凸集合になっていれば、$M$ はストレートかつ反射的である。逆に、$M$ がストレートかつ反射的であれば、$P$ は $n+1$ 個の点のトロピカル凸包として表すことができる。

一般の $\mathbf{T}$ 加群 $M$ に対して、吉冨氏はその次元 $\dim M$ を、$M$ に含まれるストレートかつ反射的な部分加群の端点の数の最大値として定義した。そ

してトロピカル曲線 $C$ に対して、$r(D)$ と $H^0(C,D)$ の次元に関する関係式を証明した：

**系 2.** トロピカル曲線 $C$ とその上の因子 $D$ に対して、不等式

$$r(D) \leq \dim H^0(C,D) - 1$$

が成り立つ。

吉富氏の研究はトロピカル加群に対する新たな不変量を導入した個性的かつ独創的な研究であり、この方面の研究に新しい知見を与えるものである. こうして定義されたトロピカル加群の不変量は、その幾何学的意味などについてさらに研究の進展が期待される。よって、論文提出者　吉富　修平　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。