

論文審査の結果の要旨

氏名： 上坂正晃

上坂正晃氏は、本論文において粘弾性理論、材料科学ならびに個体群動態学における支配方程式の係数を解の限定されたデータから決定する逆問題に関して、一意性ならびに安定性を確立した。ここで、一意性とは、データによって係数を一意に定めることができるかということであり、安定性とは、データに含まれる誤差が、係数決定にどれだけの影響を与えるかということの意味している。一意性・安定性は逆問題自体の数学解析のためにまず第一に明らかにされるべきことであり、本論文では扱われてはいないが、係数を近似的に求める数値計算手法の開発や手法自体の正当化のためにも必要不可欠な基本的な問題である。

本論文において、それぞれ、弾性論、材料科学ならびに個体群動態学における、次のような方程式に関して係数決定逆問題を考察した：

- 粘弾性モデル (Kelvin-Voigt モデル) の係数決定逆問題
- Phase Field モデルの 1 成分のみの観測からの係数決定逆問題
- 構造化された個体群動態学におけるモデルに対する係数決定逆問題

逆問題に対する一意性・安定性の証明のための手法は Carleman 評価と呼ばれる偏微分方程式の解に関する L^2 -評価式を用いた Bukhgeim - Klibanov による方法論に基づいているが、彼らの論文は単独の偏微分方程式に対するものであり、しかも支配方程式に関する Carleman 評価が必要である。しかしながら、逆問題を考察するにあたり、上記の 3 つの方程式の第一、第二のものは複数の関数に関する偏微分方程式系であり、Carleman 評価自体も知られておらず、それをまずを証明しなくてはならなかったことや、独立変数に関する不定積分の項を考えなくてはならないなど、Bukhgeim - Klibanov による方法論を適用するためには多くの困難があった。同氏は積分項を含む Carleman 評価を巧みに駆使することによりこのような困難を克服した。

以下、章ごとに論文審査の結果を述べる。

第 1 章においては、Kelvin-Voigt モデルとよばれる粘弾性モデルの弾性係数などの決定逆問題を考察しており、主要結果は以下のようなものである：媒質が占める空間領域の部分境界において変位とその空間変数に関する偏導関数の時間変化が、空間変数に依存する弾性係数ならびに密度を、観測境界の幾何形状によって定まる部分領域において一意的に決定し、しかもある種の有界性ならびに初期値に関する仮定の下で Hölder タイプの連続性が成り立つ。この結果は数学的に意義深いだけでなく、次世代の医学診断技術の開発のためにも注目すべきものである。すなわち、モデル方程式を人体組織に適用した場合に、腫瘍は組織の弾性係数に変化を齎すことが知られており、体表面近くのデータで係数を精度よく推定することにより初期段階の腫瘍の検知に役立つことが大いに期待されており、同氏の結果はその理論的な正当化を与えるものであるからである。

第2章においては、Phase Field モデルの方程式の熱伝導係数ならびに易動度を温度のみの観測データから決定する逆問題において一意性と Lipschitz タイプの連続性を証明している。Phase Field モデルはもともと、結晶成長などを伴う材料科学において提唱され数学解析も進められているが、そのためには係数をどのようにモデル化するのかという課題が重要であり、同氏はこの課題に逆問題の観点から解決を与えた。

第3章においては、構造化された個体群動態学におけるモデル方程式を考察している。ここで考察したモデル方程式は個体数が時刻と場所、年齢だけではなく、個体サイズにも依存することを考慮に入れたモデルである。場所を表す変数に依存する拡散係数、成長速度ならびに個体の走性を記述する係数を空間領域の境界上で時間、年齢、サイズに関して観測したデータから決定する逆問題に関して一意性及び Lipschitz タイプの連続性を証明した。

これらの結果は、論文提出者が既存の方法論によりながらも、技術的な困難さを様々な技法で克服して得たもので、数学解析の見地のみならず関連応用分野における課題解決のための理論的な正当化を与えるものである。よって、論文提出者 上坂正晃 は博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。