論文の内容の要旨

論文題目：
Conditional stability by Carleman estimates for inverse problems ： coefficient inverse problems for the Dirac equation, the determination of subboundary by the heat equation and the continuation of solution of the Euler equation

論文題目和訳：
逆問題に対するカーレマン評価による条件付き安定性 ：
ディラック方程式に対する係数逆問題，熱方程式による部分境界の決定およびオイラー方程式に対する解の接続

氏名：川本 敦史

本論文において，偏微分方程式に関する逆問題について研究を行った．ディラック方程式に対する係数決定の逆問題，熱方程式に対する境界決定の逆問題，さらに，線形化されたオイラー方程式に対する一意接続性について考察し，それぞれに対して安定性評価を得た．各証明は，偏微分方程式の解に対する重み関数付きの L^2 の評価であるカーレマン評価に基づく．

第一章

第一章では，ディラック方程式における係数である電磁ポテンシャルを決定する逆問題を考え，双曲型方程式に対するカーレマン評価を用いて安定性評価を確立した．

Ω を有界領域，T を正定数とするとき，スピノル $\mathbf{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x), u_4(t,x))$, $(t,x) \in (-T,T) \times \Omega$ に対する次のディラック方程式を考えた：

$$\left(i \sum_{k=0}^{3} \gamma^k (\partial_k - i\mathrm{e}A_k) - m_0 I \right) \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } Q,$$

ここで，i は虚数単位，γ^k はディラック行列（定数行列），$\mathbf{A}(x) = (A_0(x), A(x))$ は電磁ポテンシャル（$A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ はベクトルポテンシャル），e は電荷（定数），m_0 は粒子の質量（定数），$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ とする．

係数を決定する際の観測する $\mathbf{u}$ の場所としては，領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ の場合と適当な部分領域 $\omega \subset \Omega$ の場合を考えた．以下，二つの場合についてそれぞれ逆問題を定式化し結果について述べる．

境界観測

ディラック方程式，初期条件，ディリクレ境界条件が与えられているときノイマン境界データから電磁ポテンシャルを決定する逆問題を考える．

$\mathbf{u}_j$ が $j=1,2$ に対して次の方程式系を満たすとする：

$$
\begin{cases}
\left(i \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \gamma^k (\partial_k - i\mathrm{e}A_k) - m_0 I \right) \mathbf{u}_j = 0 & \text{in } Q, \\
\mathbf{u}_j(t,x) = f_j(t,x), & (t,x) \in (-T,T) \times \partial\Omega, \\
\mathbf{u}_j(0,x) = g_j(x), & x \in \Omega.
\end{cases}
$$

また，電磁ポテンシャル $\mathbf{B}$ に対して $\mathbf{v}_j$ が同様の方程式系を満たすとする．

このとき，T，$\mathbf{u}_j$，$\mathbf{v}_j$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，g_j に対する適当な条件の下で，二回の観測を行うことで次の安定性評価が成り立つことを示した（定理 1.2.1）：

$$
\int_\Omega (|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 + |\nabla(\mathbf{A}-\mathbf{B})|^2) dx \le C \sum_{j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} \int_{-T}^{T} |\partial_t(\partial_\nu \mathbf{u}_j - \partial_\nu \mathbf{v}_j)|^2 dt ds.
$$

ここで $C>0$ は定数である．

さらに，$A_0 = B_0$ in Ω を仮定し，ベクトルポテンシャルのみをノイマン境界データから決定する逆問題においては，T，$\mathbf{u}_j$，$\mathbf{v}_j$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，g_j に対する適当な条件の下で，一回だけの観測を行うことで次の安定性評価が成り立つ（定理 1.2.2）：

$$
\int_\Omega (|A-B|^2 + |\nabla(A-B)|^2) dx \le C \int_{\partial\Omega} \int_{-T}^{T} |\partial_t(\partial_\nu \mathbf{u}_1 - \partial_\nu \mathbf{v}_1)|^2 dt ds.
$$

ここで $C>0$ は定数で，$\partial_\nu \mathbf{u} = (\partial_\nu u_1, \partial_\nu u_2, \partial_\nu u_3, \partial_\nu u_4)$ とする．

内部観測

ディラック方程式，初期条件，ディリクレ境界条件，ノイマン境界条件が与えられているとき適当な条件を満たす部分領域 $\omega \subset \Omega$ を固定して，部分領域における $\mathbf{u}$ から電磁ポテンシャルを決定する逆問題を考える．

$\mathbf{u}_j$ が $j=1,2$ に対して次の方程式系を満たすとする：

$$
\begin{cases}
\left(i \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \gamma^k (\partial_k - i\mathrm{e}A_k) - m_0 I \right) \mathbf{u}_j = 0 & \text{in } Q, \\
\mathbf{u}_j(t,x) = 0,\ \partial_\nu \mathbf{u}(t,x) = 0, & (t,x) \in (-T,T) \times \partial\Omega, \\
\mathbf{u}_j(0,x) = g_j(x), & x \in \Omega.
\end{cases}
$$

また，電磁ポテンシャル $\mathbf{B}$ に対して $\mathbf{v}_j$ が同様の方程式系を満たすとする．

このとき，境界観測とは異なる観測時間 T と $\mathbf{u}_j$，$\mathbf{v}_j$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，g_j, ω に対する適当な条件の下で，二回の観測を行うことで次の安定性評価が成り立つことを示した（定理 1.2.3）：

$$
\int_\Omega (|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 + |\nabla(\mathbf{A}-\mathbf{B})|^2) dx \le C \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \int_\omega \int_{-T}^{T} |\partial_t^k (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}_j)| dt dx.
$$

ここで $C>0$ は定数である．

また，$A_0 = B_0$ in Ω を仮定し，ベクトルポテンシャルのみを決定する逆問題では T と $\mathbf{u}_j$，$\mathbf{v}_j$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，g_j, ω に対する適当な条件の下で，一回だけの観測を行うことで次の安定性評価が成り立つ（定理 1.2.4）：

$$\int_\Omega (|A-B|^2 + |\nabla(A-B)|^2)dx \le C \sum_{k=1}^{2} \int_\omega \int_{-T}^{T} |\partial_t^k(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1)|^2 dtdx,$$

ここで $C > 0$ は定数である．

さらに，$A_k = B_k$ in ω $(k = 1, 2, 3)$ となるときには，T と $\mathbf{u}_j$，$\mathbf{v}_j$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，g_j, ω に対する適当な条件の下で，$\mathbf{u}$ の二成分のみからベクトルポテンシャルを決定することができる：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|A-B|^2 + |\nabla(A-B)|^2)dx \\ &\le C \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \left(\int_\omega \int_{-T}^{T} \left(|\partial_t^k(\mathbf{u}_{1,\ell} - \mathbf{v}_{1,\ell})|^2 + |\partial_t^k \nabla_{t,x}(\mathbf{u}_{1,\ell} - \mathbf{v}_{1,\ell})|^2 \right) dtdx \right)^\theta.\end{aligned}$$

ここで $C > 0$，$\theta \in (0, 1)$ は定数である．

第二章

第二章では，熱方程式に対する境界決定の逆問題について考え，安定性評価を確立した．ある物体が腐食などにより物体の境界の一部が破壊された場合を考える．この破壊された境界の一部を直接観測することが難しい状況下において，非定常熱伝導方程式を用いて，破壊された境界の一部とは異なる観測可能な境界の一部から破壊された境界の形状を調べる逆問題を考えた．具体的には，位置 x，時刻 t における温度 $u_j(x, t)$ が次の方程式系を満たすとする．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t}(x, y, t) = \triangle u_j(x, y, t), & (x, y, t) \in \Omega_j \times (0, T), \\ u_j(x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in \gamma_j \times (0, T), \\ u_j(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega_j, \\ u_j(x, y, t) = g(x, y, t), & (x, y, t), \in (\partial\Omega_j \setminus \gamma_j) \times (0, T). \end{cases}$$

ここで，$j = 0$ のときは破壊される前の方程式を，$j = 1$ のときは破壊された後の方程式を表すとする．また γ_j は，領域の破壊を受ける境界の一部とする．$0 < a < c < d < b < 1$ とする．ここで，破壊される前の領域を $\Omega_0 = \{(x, y); 0 < y < 1,\ -\sqrt[4]{1/16 - (y - 1/2)^4} < x < 1 + \sqrt[4]{1/16 - (y - 1/2)^4}\}$ とし，このとき観測された熱流束を $h_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}\big|_{\Gamma \times (0,T)}$ とする．ただし $\Gamma = \{(x, 0); a < x < b\}$．また，破壊された後の領域を $\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \{(x, y); 0 \le x \le 1,\ F(x) \le y \le 1\}$ とし，このとき観測された熱流束を $h = \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\big|_{\Gamma \times (0,T)}$ とするここで，破壊された境界の形状を表す関数 F と g_0 に適切な条件を課すことによって次の安定性評価を得た．ある定数 $\kappa \in (0, 1)$ と $C > 0$ があって，次が成り立つ（定理 2.3.1）：

$$\|F - 1\|_{L^2(c,d)} \le \left(\frac{C}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \right)^\kappa.$$

ただし，

$$\varepsilon = \sup_{0<t<T} \left(\int_a^b |h_0(x, t) - h(x, t)| dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ここで, $\|F-1\|_{L^2(c,d)}$ は破壊前後における境界の形状の差を表し，ε は観測値の差を表す．

第三章

第三章では，線形化されたオイラー方程式に対する一意接続性における安定性評価を確立した．

具体的には，次の線形化されたオイラー方程式を考える．Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界領域とし，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであるとする．Γ を $\partial\Omega$ に含まれる開集合とする．$Q=\Omega\times(0,T)$ とおく．$a:\overline{\Omega}\times[-T,T]\to\mathbb{R}^3$ を C^2 級の関数とする．

$$\begin{cases}\partial_t(x,t)+(a\cdot\nabla)v(x,t)=-\nabla p+f(x,t), & (x,t)\in Q,\\ \operatorname{div}v(x,t)=0, & (x,t)\in Q.\end{cases}\tag{0.0.1}$$

まず，オイラー方程式に rot を施し，渦度の方程式に対してカーレマン評価（定理 3.2.1）を求め，そのカーレマン評価を用い (0.0.1) に対してのカーレマン評価（定理 3.2.2）を得た．次に，(0.0.1) に対するカーレマン評価を用いて，

$$\begin{cases}\partial_t v(x,t)+(a\cdot\nabla)v(x,t)=-\nabla p+f(x,t), & (x,t)\in Q,\\ \operatorname{div}v(x,t)=0, & (x,t)\in Q,\\ v(x,t)=g_0(x,t), & (x,t)\in\Gamma\times(0,T),\\ \partial_\nu v(x,t)=g_1(x,t), & (x,t)\in\Gamma\times(0,T),\end{cases}$$

を満たす $v\in H^2(Q)$ に対して，適切な仮定の下に次の一意接続性における安定性を証明した（定理 3.2.3）: ある定数 $C,\kappa\in(0,1)$ が存在して，

$$\|\partial^\alpha v\|_{\{L^2(Q_\varepsilon)\}^3}\le C(F+M^{1-\kappa}F^\kappa)\quad(|\alpha|\le 2).\tag{0.0.2}$$

ただし，$F=\|f\|_{\{L^2(0,T:H^2(\Omega))\}^3}+\|p\|_{H^2(Q)}+\|g_0\|_{\{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma\times(0,T))\}^3}+\|g_1\|_{\{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma\times(0,T))\}^3}$，$M=\|\partial_t v\|_{\{L^2(Q)\}^3}+\|v\|_{\{L^2(0,T:H^2(\Omega))\}^3}$. また，ここで，$Q_\varepsilon$ はカーレマン評価を求める際に用いた関数 ψ による領域で $Q_\varepsilon=\{(x,t)\in Q|\psi(x,t)>\varepsilon\}$ である．