

論文の内容の要旨

論文題目

Non-commutative Reidemeister torsion, Morse-Novikov theory
and homology cylinders of higher-order
(非可換ライデマイスタートーション, モース ノビコフ理論
及び高次のホモロジーシリンダー)

氏 名 北山 貴裕

本論文の目標は、非可換係数の Reidemeister torsion の Morse 理論的或いは力学系的な表示を記述することと、後述する‘高次の’homology cylinder たちの成す monoid 及びその homology 同境界群の代数構造を非可換係数の Reidemeister torsion を用いて調べることである。

向き付けられた滑らかな閉多様体 X に対して、その上の Riemann 計量と S^1 -値 Morse 関数 $f: X \rightarrow S^1$ であって、臨界点の安定多様体と不安定多様体が全て横断的に交わり、 ∇f の閉軌道が全て非退化であるものを選ぶ。生成元 $t \in \pi_1 S^1$ を S^1 の標準的な向きとは逆行するものとし、 $f_*: \pi_1 X \rightarrow \langle t \rangle$ に付随する $\mathbb{Z}[\pi_1 X]$ の Novikov 完備化を Λ_f 、 $1 + \sum_{\gamma \in \pi_1 X, \deg f_*(\gamma) > 0} a_\gamma \gamma$ と書ける元から成る Λ_f の単数群の部分群を W とする。

まず、 W のある可換商 \overline{W}_{ab} を考え、‘非可換な’Lefschetz 型 zeta 関数 $\zeta_f \in \overline{W}_{ab}$ を以下の式によって定義する：

$$\zeta_f = \prod [1 - (-1)^{i_-(o)} [\sigma_o o \bar{\sigma}_o]]^{(-1)^{i_-(o)+1}} .$$

但し、積は像を 1 周だけするような閉軌道 $o: S^1 \rightarrow X$ 全体の集合のパラメータ変換 $U(1)$ による商集合に渡って取るものとする。ここで、 $i_-(o)$ 、 $i_0(o)$ は各 o に対して決まるある整数であり、また、 σ_o 、 $\bar{\sigma}_o$ は任意に選ばれた X の基点から $o(S^1)$ への道とその逆、 $[\sigma_o o \bar{\sigma}_o]$ は道の合成 $\sigma_o o \bar{\sigma}_o$ が定める $\pi_1 X$ の元である。任意の積の順序に対して、この無限積が意味を持つこと、更に、 ζ_f はその積の順序、道 σ_o の選び方に依らないことが確かめられる。可換化写像 $\pi_1 X \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$ が誘導する \overline{W}_{ab} から $\mathbb{Z}[H_1(X; \mathbb{Z})]$ の Novikov 完備化の単数群への準同型写像によって、 ζ_f は‘可換な’Lefschetz 型 zeta 関数に写される。

次に、poly-torsion-free-abelian である群 G と $\alpha \circ \rho = f_*$ となるような準同型写像 $\rho: \pi_1 X \rightarrow G$ 、 $\alpha: G \rightarrow \langle t \rangle$ を取る。群環 $\mathbb{Z}[G]$ 、 $\mathbb{Z}[\text{Ker } \alpha]$ は Ore 整域であり、それぞれの商体 $\mathbb{Q}(G)$ 、 \mathcal{K} に埋め込まれることが知られており、半直積分解 $G = \text{Ker } \alpha \rtimes_\theta \langle t^l \rangle$ に対応して、 $\mathbb{Q}(G) = \mathcal{K}_\theta(t^l)$ と表わすことができる。準同型写像

$\rho: \pi_1 X \rightarrow G$ は Laurent 冪級数環 $\mathcal{K}_\theta((t^l))$ への準同型写像 $\Lambda_f \rightarrow \mathcal{K}_\theta((t^l))$ に自然に拡張されるが、これを再び ρ で表わす。群 \overline{W}_{ab} と同様に構成される $\mathcal{K}_\theta((t^l))$ の単数群のある可換商 $\overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}_{ab}^\times$ を考えると、誘導準同型写像 $\rho_*: \overline{W}_{ab} \rightarrow \overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}_{ab}^\times$ が得られる。

準同型写像 ρ に付随する局所系の homology 群 $H_*^\rho(X; \mathcal{K}_\theta((t^l)))$ が消えるとき、 ρ に付随する Reidemeister torsion $\tau_\rho(X) \in \overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}_{ab}^\times / \pm \rho(\pi_1 X)$ 及び f が定める $\mathcal{K}_\theta((t^l))$ 上の Novikov 複体の代数的 torsion として Novikov torsion $\tau_\rho^{Nov}(f) \in \overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}_{ab}^\times / \pm \rho(\pi_1 X)$ が定義される。このとき、主定理は次の通りである。

定理 1. 上のような (ρ, α) に対して、 $H_*^\rho(X; \mathcal{K}_\theta((t^l)))$ が消えるならば、

$$\tau_\rho(X) = \rho_*(\zeta_f) \tau_\rho^{Nov}(f) \in \overline{\mathcal{K}_\theta((t^l))}_{ab}^\times / \pm \rho(\pi_1 X) .$$

これは可換表現の場合に Hutchings-Lee, Pazhitnov によって得られていた公式の非可換係数への一般化となっており、Cochran, Friedl, Harvey らによる higher-order Reidemeister torsion の積分解を導く。

(空でもよい) n 個の境界成分を持つ種数 g の向き付けられたコンパクト曲面を $\Sigma_{g,n}$ と書き、 $\Gamma_m := \pi_1 \Sigma_{g,n} / (\pi_1 \Sigma_{g,n})^{(m+1)}$ と置く。まず、与えられた整数 $m \geq 0$ に対して、‘マーキング写像’ $i_\pm: \Sigma_{g,n} \rightarrow \partial M$ が同型写像 $\Gamma_m \rightarrow \pi_1 M / (\pi_1 M)^{(m+1)}$ を導くような homology cylinder (M, i_\pm) として、 $\Sigma_{g,n}$ 上の m 次の homology cylinder を導入する。これら m 次の homology cylinder の同型類の集合 $C_{g,n}^{(m)}$ 、3次元多様体として既約であるものたちの成す部分集合 $\overline{C}_{g,n}^{(m)}$ は、cylinder の ‘積み重ね’ によって monoid, submonoid の構造を持つ。また、homology cylinder からの inclusion が基本群の同様の可解商の上に同型写像を導くような、滑らかな homology 同境による $C_{g,n}^{(m)}$ の同境群 $\mathcal{H}_{g,n}^{(m)}$ を導入する。群 $\mathcal{H}_{g,n}^{(m)}$ は $\Sigma_{g,n}$ の写像類群の一つの拡大を与えていることが確認できる。曲面の写像類群の Dehn-Nielsen 写像の類似として、自然な準同型写像 $C_{g,n}^{(m)} \rightarrow \text{Out}(\Gamma_m)$ 及び誘導準同型写像 $\overline{C}_{g,n}^{(m)} \rightarrow \text{Out}(\Gamma_m)$ 、 $\mathcal{H}_{g,n}^{(m)} \rightarrow \text{Out}(\Gamma_m)$ が考えられ、これらの核をそれぞれ $IC_{g,n}^{(m)}$ 、 $\overline{IC}_{g,n}^{(m)}$ 、 $I\mathcal{H}_{g,n}^{(m)}$ とする。

次に、Reidemeister torsion と上の Dehn-Nielsen 型準同型写像を用いて、準同型写像

$$\begin{aligned} C_{g,n}^{(m)} &\rightarrow (\mathbb{Q}(\Gamma_m)_{ab}^\times / \pm \Gamma_m) \rtimes \text{Out}(\Gamma_m) , \\ \mathcal{H}_{g,n}^{(m)} &\rightarrow (\mathbb{Q}(\Gamma_m)_{ab}^\times / \pm \Gamma_m \cdot \langle q\bar{q} \rangle) \rtimes \text{Out}(\Gamma_m) \end{aligned}$$

を構成する。ここで、 $\mathbb{Q}(\Gamma_m)_{ab}^\times$ は $\mathbb{Z}[\Gamma_m]$ の商体の単数群の可換化であり、 $\bar{\cdot}: \mathbb{Q}(\Gamma_m)_{ab}^\times \rightarrow \mathbb{Q}(\Gamma_m)_{ab}^\times$ は Γ_m 上の involution $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ が誘導する involution である。これらは Cha-Friedl-Kim によって構成された $C_{g,n}^{(0)}$ 、 $\mathcal{H}_{g,n}^{(0)}$ 上の準同型写像の拡張になっている。また、以下の定理が示される。

定理 2. $(g, n) \neq (0, 0), (0, 1)$ のとき、全ての正整数 m に対して、準同型写像 $\mathcal{H}_{g,n}^{(m)} \rightarrow \mathcal{H}_{g,n}$ 、 $I\mathcal{H}_{g,n}^{(m)} \rightarrow I\mathcal{H}_{g,n}$ は全射ではない。

更に、 $\Sigma_{g,n} \times [0, 1]$ 、 S^3 の結び目補空間を各結び目に沿って張り合わせることによって、 $C_{g,n}^{(m)}$ の元を構成する方法を与え、その Reidemeister torsion の計算を行う。帰結として、以下の定理が得られる。

定理 3. (i) $\overline{IC}_{0,2}^{(1)} \neq \overline{IC}_{0,2}^{(0)}$.

(ii) $\overline{IC}_{1,0}^{(1)} \neq \overline{IC}_{1,0}^{(0)}$.

(iii) $(g, n) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)$ のとき、全ての m に対して、 $\overline{IC}_{g,n}^{(m+1)} \neq \overline{IC}_{g,n}^{(m)}$ である。

最後に、 $n > 0$ のとき、 $\mathbb{Q}(\Gamma_m)_{ab}^\times / \pm \Gamma_m$ からある自由 abel 群への全射を構成することにより、以下の定理が示される。

定理 4. $n > 0$ かつ $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ のとき、全ての m に対して、 $\overline{IC}_{g,n}^{(m)}$ は有限生成ではない。

この定理は合田-逆井によって示された $\overline{C}_{g,n}^{(0)}$ の非有限生成性の類似的結果と見做せる。