論文審査の結果の要旨

氏 名　　小 寺 諒 介

提出論文のタイトルは，

Extensions between finite-dimensional simple modules
over a generalized current Lie algebra
（一般化されたカレントリー代数上の有限次元単純加群の間の拡大）

である．$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純リー代数，A を有限生成可換 $\mathbb{C}$ 代数とする時，$\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $\mathfrak{g} \otimes A$ は自然なリー代数の構造を持つ．これを一般化されたカレントリー代数と呼ぶ．特に，次に挙げる２つのケース

- $A = \mathbb{C}[t]$ の場合（この場合 $\mathfrak{g} \otimes A$ はカレントリー代数と呼ばれる）
- $A = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合（この場合 $\mathfrak{g} \otimes A$ はループリー代数と呼ばれる）

は，可解格子模型や共形場理論等の数理物理学とも密接な関係があることが知られており，その表現論が詳しく調べられてきた．

他方，A を一般化しようという試みは，純粋に数学的な興味から部分的に行われてはいたが，具体的なモティベーションに乏しい（数理物理学等への応用が知られていなかった）こともあり，組織的な研究は殆ど行われていなかったと言ってよい．しかし，ここ数年，A が２変数多項式環の場合や，特異点を持つ曲線の関数環の場合等，いくつかの例で共形場理論との関連が指摘されるなど，(一般化された）カレントリー代数をめぐる状況は変わりつつある．

このような時代的背景の中にあって，小寺氏の挙げた業績は，一般化されたカレントリー代数の表現論における基本定理とも呼ぶべきものであり，今後の研究の礎となる結果である．

以下，本論文の具体的内容について述べる．主結果は次の２つである：

(1) $\mathfrak{g} \otimes A$ 上の有限次元単純加群の間の１次の Ext 群に関する明示的公式

(2) $\mathfrak{g} \otimes A$ 上の有限次元加群のなす圏のブロック分解

一般に加群の圏を扱う場合，最も基本的な問題は，その圏における単純対象，すなわち単純加群を分類する問題である．$\mathfrak{g} \otimes A$ 上の有限次元加群のなす圏の場合，Chari-Fourier-Khandai (CFK) によって単純加群の完全に分類されている．しかし，$\mathfrak{g} \otimes A$ 上の有限次元加群のなす圏は半単純ではないため，単純加群を全て求めただけでは，圏全体の構造の理解にはほど遠い．このような場合，単純加群の間の拡大の構造を詳しく理解することが，圏全体の理解へのファースト・ステップとなる．特に重要なのは１次の Ext 群を決定する問題で，本論文の主結果 (1) は，これに当たる．

$A = \mathbb{C}[t]$ 乃至 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合には，Chari-Greenstein (CG) によって，単純加群の間の１次の Ext 群は完全に決定されている．したがって，本論文の主結果 (1) は CG の結果の拡張であると言って良い．ただし，その証明の方法は全く異なる．CG の論法は，複雑な計算を積み重ねて結果を証明するという，正しくはあるが見通しの悪いもので，また $A = \mathbb{C}[t]$ または $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 以外の場合には通用しないものであった．他方，今回小寺氏の用いた方法は，$\mathfrak{g} \otimes A$ 上の有限次元加群のなす圏が持つ "rigidity" と呼ばれる性質使って，ホモロジー代数の一般論から結果を導くというもので，非常に見通しが良い．すなわち，A を $\mathbb{C}[t]$ または $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合だけに限定したとしても，オリジナルの CG の証明よりもはるかに見通しの良い別証明を与えたことになっている．この点は本論文の最も高く評価すべき点であると考える．

(2) については，$A = \mathbb{C}[t]$ または $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の場合の先行結果として，Chari-Moura (CM) の結果が知られている．本論文では，主結果 (1) の系として (2) が導かれる．そこで用いられる論法は，基本的に CM のアイデアを踏襲したものであるが，単なる一般化というわけではない．さらに「$\mathfrak{g} \otimes A$ 上の有限次元加群のなす圏の構造を理解する」という問題意識からすれば，ブロック分解を具体的に与えたこと自体に非常に意味があり，今後の $\mathfrak{g} \otimes A$ の表現論の研究における，１つの基本定理と呼ぶべき成果であることは間違いない．

上述のように，本提出論文は高い学術的価値を持つと考えられる．したがって，論文提出者小寺諒介は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．