論文審査の結果の要旨

張　欽

本論文において，論文提出者は非可換 L^1 空間におけるエルゴード不等式に関する興味深い研究を行った．

可換な von Neumann 環はある測度空間上の L^∞ 関数環と同一視される．このため，一般の非可換な von Neumann 環を「非可換 L^∞ 空間」と考えよう，というアイディアは古くからある．さらにこの考え方を推し進めた「非可換 L^p 空間」についても多くの詳しい研究がなされている．それには，関数解析，実解析に根差したさまざまな手法が高度に用いられる．そこで測度論におけるさまざまな古典的な結果をこの設定に一般化しようという試みが長年にわたり研究されてきた．特にエルゴード理論の結果の一般化は多くの関心を集めており，本研究もその流れにおける研究の一つである．

確率測度空間 X 上でエルゴード変換 T を考え，正値関数について，$T^0, T^1, \ldots, T^n$ をほどこした平均をとる．この平均の列の n 項めまでの最大値の L^p ノルムを評価するのが古典的な不等式である．これを非可換 L^p 空間に拡張することが有名な問題であったが，これは 2007 年の Junge-Xu の論文 (J. Amer. Math. Soc.) で解決された．正値関数を一般化した正値作用素の列については，(Hilbert 空間が有限次元であっても)「最大値」がうまく定義できないということが大きな問題であり，この点をうまく回避することが重要なポイントであったが，それを新しい工夫で解決したのである．しかし同論文ではある写像の完全正値性という条件が仮定されており，それが単なる正値性に弱められるのではないか，ということが同論文で問題として挙げられていた．論文提出者は，この問題を解決するには二つの古典的な結果の非可換 L^p 空間への一般化を行えばよいという方針をたて，その問題の一つを本論文で解決したものである．

この，非可換 L^p 空間における問題については 1977 年の Yeadon の先行する結果がある．もともとの古典的な設定で，上のようなエルゴード平均の収束を考えると,「小さい測度の集合を除けば一様収束」というタイプの結果が成り立つ．Yeadon はこの結果の非可換 L^1 空間への拡張を,「von Neumann 環が半有限」という仮定の下で行った．この仮定は von Neumann 環が忠実な半有限トレースを持つと言ってもよいもので，このため，この設定での非可換 L^1 空間を，トレース的な非可換 L^1 空間と呼ぶ．その際の主要な技法は,「一様収束がコントロールできる部分」と「そうでない部分」に全空間を分け，後者の空間の測度を評価するというものであった．本論文では論文提出者は，このタイプの評価を半有限とは限らない一般の von Neumann 環に対して行った．したがって，考える空間は非トレース的な非可換 L^1 空間と呼ばれるものである．しかしこの一般的設定では，一様収束にあたるコント

ロールはもはやできなくなり，非可換 L^1 収束についてのコントロールしかできないことが明らかになった．これは自動的に非有界作用素が出てくるからであり，全体の設定を一般化したために必然的に現れる興味深く新しい現象である．

基本的な手法は多くの先行する結果によっているが，論文提出者は技術的に困難なさまざまな問題点をクリアし，明確な動機のもとに具体的な結果を得た．これは興味深い結果として世界の専門家から認められている．よって，論文提出者張欽は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．