論文審査の結果の要旨

氏名　直井克之

アファインリー代数あるいはその q-変形であるアファイン量子展開環には、最高ウエイトを持つ可積分表現並びに、レベル 0 の有限次元表現という、豊かな構造を持ち、広く応用を持つ 2 つの重要な表現のクラスがある。 前者は、古典的なコンパクト群の表現の自然な対応物であり、真っ先に研究されていたものである。 後者は、より遅く 90 年代以降研究が進んだものであるが、前者とは由来も性質もまったく異なっている。 パラメータ q を 1 に持っていく古典極限を取る操作は前者においては良く理解されているが、後者においては自明でない問題になる。カレントリー代数のワイル加群は Chari らによってこの問題を理解するために導入されたものである。このさいワイル加群の指標公式を求めることが重要になるが、Chari らはこの問題をワイル加群の次元についての予想に帰着し、その後中島啓の未発表の結果により次元予想は解かれている。 一方 Fourier-Littelmann は、Dynkin 図形が一重線だけからなる ADE 型の場合に、ワイル加群とデマジュール加群が同型であることを示すことによって次元予想をこの場合に解いた。 この結果は、レベル 0 の有限次元表現の研究から出てきたワイル加群と最高ウエイトを持つ可積分表現の部分表現であるデマジュール加群を結びつけるものであり極めて興味深い一方、証明は生成元と基本関係式をチェックするものでなぜそうなっているのか理解しがたいミステリアスなものになっている。

直井氏はまず、Fourier-Littelmann の結果を ADE 型以外の場合に拡張することに取り組んだが、実はこの場合はワイル加群とデマジュール加群は一般には同型にはならず事情ははるかに複雑になっている。 彼はまず、ワイル加群にはフィルター付けの構造が入りその逐次商はあるデマジュール加群の商加群になることを、Joseph のデマジュール加群についての結果を適用した上、Fourier-Littelmann の手法をさらに洗練することによって見い出した。これが本論文の前半を占める内容である。 逐次商はデマジュール加群と同型になるのが最終的な結果だがこの議論だけでは、商加群になることしか言えない。 そこで直井氏は、内藤-佐垣による結晶基底に関する深い結果に注目した。 最高ウエイトを持つ可積分表現は結晶基底という重要な構造を持っている。また、レベル 0 の有限次元表現においても、ファンダメンタル表現という結晶基底を持つ重要なクラスが知られていた。内藤-佐垣の結果は結晶基底のパス模型を通じてこの二つの結晶基底を結び付けるものである。直井氏はこの結果を踏まえ、結晶基底 (に最大ウエイトベクトルをテンソルしてレベルをシフトしたのち) をデマジュール加群に対応物で分解することを論文の後半部分で行った。 この結果は前半部分の結晶基底サイドでの対応物と言えるが、前半では次元の上からの評価が出てくるのに対して、後半部分では下からの評価が出てくる。 内藤-佐垣や、Chari らの結果を組み合わせるとこれらの 2 種類の評価を組み合わせることがで

き、ワイル加群と結晶基底の両方で同時に精密な結果が得られる。特にワイル加群のフィルター付けの逐次商はデマジュール加群と同型になる。後半部分の結果を出すために、直井氏は結晶基底のテンソル積の分解についての結果を得ているがこれは既存の結果よりも一般的なものである。

直井氏の結果よりワイル加群の次元予想はすぐに従うが、次元予想から得られる指標公式にはワイル加群の自然な次数付けの情報は含まれない。 一方、直井氏の結果はそれにとどまらず次数付けの情報込みの指標公式を導くものである。 この新しい指標公式に付加された情報は結晶基底においてはエネルギー関数に対応するものであり、新しい指標公式から X=M 予想をファンダメンタル表現の場合に導くことができるなど非常に重要なものであると考えられる。

また直井氏の結果はミステリアスなワイル加群とデマジュール加群の関係を結晶基底のパス模型に関する内藤-佐垣の結果からの解釈を与えるものであるとも考えられる。

この論文において直井氏の卓越した、本質を見抜く洞察力、専門分野に対する深い理解が随所に見て取れる。 特に本論文における論証は随所に非凡な着想がちりばめられており目を見張るものがある。よって、論文提出者 直井克之は、 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。