論文審査の結果の要旨

氏名　中原　健二

本論文は、独立同分布の確率変数の和の分布の一様評価について、特に確率分布の裾野が -2 の regularly varying である場合について調べたものである。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$X_1, X_2, \cdots$ は独立同分布な確率変数列で、$E[X_1^2] = 1,\ E[X_1] = 0$ と仮定する。X_1 の分布を $\mu,\ \bar{F} = \mu((x,\infty)) = 1 - F(x)$ とおく。この時、中心極限定理が成立するが、さらに詳しく、一様評価を示すことがこの論文の目的である。

以下のことを仮定する。

（A1） ある $\alpha > 0$ に対して、$\bar{F}(x)$ は $x \to \infty$ の時、指数 $-\alpha$ の regularly varying 関数

（A2） ある $\delta_0 > 0$ に対して $\int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha+\delta_0}\mu(dx) < \infty.$

(A3) μ は密度関数 $\rho : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ をもち、さらに ρ は右連続関数で有界な全変動をもつとする。

今、$v_n = \int_{-\infty}^{n^{1/2}} x^2\mu(dx),\ n \geqq 1,\ L(x) = x^{\alpha}\bar{F}(x),\ x \geq 1,$ とおく。さらに、

$$\Phi_0(s) = \int_s^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,\ s \in \mathbf{R},$$

とおく。この時、次を示した.

定理 1 $\alpha = 2$ とする。このとき

$$\sup_{s\in[1,\infty)} \left|\frac{P(\sum_{k=1}^n X_k > n^{1/2}s)}{\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1\right| \to 0,\ n \to \infty. \tag{1}$$

定理 2 $\alpha = 2$ とする。

(1) $\limsup_{n\to\infty}(1 - v_n)\log\dfrac{1}{L(n^{1/2})} = 0$ ならば

$$\sup_{s\in[1,\infty)} \left|\frac{\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)}{\Phi_0(s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1\right| \to 0, \quad n \to \infty \tag{2}$$

が成り立つ.

(2) $\limsup_{n\to\infty}(1 - v_n)\log\dfrac{1}{L(n^{1/2})} > 0$ ならば式 (2) は成り立たない.

$\alpha>2$ の時、仮定 (A-1),(A-2) の下で式 (2) が成り立つことは A. Nagaev 及び S. Nagaev が独立に示している。本論文の結果により、$\alpha=2$ の時は式 (2) は一般には成立せず、式 (1) のように修正せねばならないことがわかる。

これまでは $E[X_1^2]=1$ と仮定したが一般に $E[X_1^2]=\infty$ の場合にも同様の結果が成り立つことも論文では示している。

$\tilde{t}_n=\sup\{t>0;\ n\int_{-\infty}^{t}x^2\mu(dx)>t^2\}$, $\tilde{v}_n=\int_{-\infty}^{\tilde{t}_n}x^2\mu(dx)$ とおく。このとき次を示した。

定理 3 $\alpha=2$ に対して (A1), (A2), (A3) を仮定し、さらに $E[X_1^2]=\infty$, $E[X_1]=0$ と仮定する。このとき

$$\sup_{s\in[1,\infty)}|\frac{P(\sum_{k=1}^{n}X_k>\tilde{t}_ns)}{\Phi_0(s)+n\bar{F}(\tilde{t}_ns)}-1|\to 0,\ n\to\infty.$$

論文では、これらの定理を証明するために、より精密な以下の評価を示している。

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad \Phi_2(x)=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad x\in\mathbf{R}.$$

とおき、$H_2:\mathbf{N}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を

$$H_2(n,s)=\Phi_0(s)+n\int_{-\infty}^{s}\bar{F}(\tilde{t}_n(s-x))\Phi_1(x)dx$$
$$-n\left(\tilde{t}_n^{-1}\Phi_1(s)\int_0^{\infty}x\mu(dx)+\tilde{t}_n^{-2}\frac{\Phi_2(s)}{2}\int_0^{\tilde{t}_n}x^2\mu(dx)\right)$$

で定義する。

定理 4 $\alpha=2$ に対して (A1), (A2), (A3) を仮定し、$E[X_1]=0$ とする. このとき任意の $\delta\in(0,1)$ に対してある $C>0$ が存在して

$$\sup_{s\in[1,\infty)}|\frac{P(\sum_{k=1}^{n}X_k>\tilde{t}_ns)}{H_2(n,s)}-1|\le C(n\bar{F}(\tilde{t}_n))^{1-\delta},\ n\geqq 1$$

が成り立つ。

このように本論文では独立確率変数の和の分布という古典的な対象に対して、評価が最も複雑となる分布関数が指数 -2 の regularly varying 関数となる場合に一様評価の定理を与えた。これは確率論の観点から高く評価できるものである。

よって、論文提出者　中原　健二　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。