論文の内容の要旨

論文題目 (英文)

Inductive construction of the p-adic zeta functions for non-commutative p-extensions of exponent p of totally real fields

論文題目 (和文)

総実代数体の冪指数 p 型非可換 p 拡大に対する p-進ゼータ関数の帰納的構成

氏名: 原　隆

以下では p は奇素数とする．非可換岩澤理論は，2004 年にジョン・コーツ，深谷太香子，加藤和也，ラムドライ・スジャータ並びにオトマール・ヴェンヤコブが (虚数乗法を持たない) 楕円曲線の非可換岩澤主予想を楕円曲線の "非可換岩澤加群"(即ち楕円曲線の p 冪等分点の座標を基礎体に付け加えた非可換 p-進リー拡大に付随するセルマー群のポントリャーギン双対,《代数的対象》) と "p-進ゼータ関数"(即ち楕円曲線の L-関数の特殊値を補間することで特徴付けられる局所化された岩澤代数のホワイトヘッド群の元,《解析的対象》) を代数的 K-理論を介して結びつける予想として定式化したこと [CFKSV] を契機として，現在に至るまで目覚ましい発展を続けている整数論の先端分野のひとつである (なお，1 次元の場合にはリッター-ヴァイスにより独立に主予想が定式化されている)．中でも最も単純なケースである総実代数体の非可換岩澤主予想に関しては，加藤和也 [Kato]，ユルゲン・リッター，アルフレッド・ヴァイス [RW1]，マヘシュ・カクデ [Kakde1] 及び学位申請者 [H] によって様々な種類の p-進リー拡大に対して主予想が証明されている．本学位論文の主題は，これ等の先行研究とは異なる型の p-進リー拡大に対して非可換岩澤主予想を証明することである．

F を総実代数体とし，F_∞/F を F の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_{cyc}/F を含む総実な p-進リー拡大 (即ち F_∞/F は総実な代数拡大で，拡大のガロワ群 $G=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が p-進リー群となるようなもの) とし，高々有限個の F の素イデアルのみが F_∞ で分岐すると仮定する．また，F_∞/F が或る種の "$\mu=0$" 型の条件を満たすことを仮定する (例えば岩澤の $\mu=0$ 予想を仮定すれば条件は満たされる．詳細は論文第 1 節の条件 (F_∞-3) を参照)．以上の設定の下で非可換岩澤主予想は定式化される (論文第 1 節参照)．

本学位論文の主定理は以下の通りである;

主定理 (論文 Theorem 3.1)**.** ガロワ群 $G=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が $G^f=\mathrm{Gal}(F_\infty/F_{\mathrm{cyc}})$ と $\Gamma=\mathrm{Gal}(F_{\mathrm{cyc}}/F)\cong\mathbb{Z}_p$ の直積と同型で，さらに G^f が冪指数 p の有限 p 群であると仮定する (即ち G^f の任意の元 g に対し $g^p=1$ が成り立つとする)．このとき拡大 F_∞/F に付随する p-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ が存在し，拡大 F_∞/F に対して非可換岩澤主予想が成立する．

主定理 (非可換岩澤主予想) の直接的な帰結として，アルティン・ゼータ関数の臨界値に関する以下の結果が得られる (論文第 3.2 節参照).

系 (論文 Corollary 3.6). 拡大 F_∞/F が上記の条件を満たすとき，その任意の有限次正規部分拡大 F'/F 及び負の整数 $1-r$ (但し r は $p-1$ で割り切れる自然数) に対して同変玉河数予想の p 部分が成立する.

主定理の証明にはデイヴィッド・バーンズと加藤和也による「p-進ゼータ擬測度の〈貼り合わせ〉」の手法を用いる．以下，副有限群 P に対してその $\mathbb{Z}_p$ 上の完備群環 (岩澤代数) を $\Lambda(P)$ で表すことにする．このとき $\Lambda(G)$ に対して標準オーレ集合と呼ばれる左右分母集合 S が定まる ([CFKSV, Theorem 2.4] 及び論文第 1 節参照). 標準オーレ集合による $\Lambda(G)$ の局所化を $\Lambda(G)_S$ で表す．さて，G の開部分群で $U=U^f\times\Gamma$ の形をしたもの (但し U^f は G^f の任意の部分群とする) に対し，その交換子群を V で表そう (これは G^f の部分群となる)．このような組 (U,V) のなす族を $\mathfrak{F}_B$ で表す．以上の準備の下で $\mathfrak{F}_B$ の各元 (U,V) に対し写像

$$\theta_{S,U,V}\colon K_1(\Lambda(G)_S)\to K_1(\Lambda(U)_S)\to K_1(\Lambda(U/V)_S)=\Lambda(U/V)_S^\times$$

を考える．但し最初の射は代数的 K-理論に於けるノルム写像であり，二番目の射は標準射 $U\to U/V$ から誘導される K-群の射である．ここで U,V による F_∞ の固定体をそれぞれ F_U,F_V と表すとき，アーベル拡大 F_V/F_U に付随するドリーニュ-リベの意味での p-進ゼータ擬測度 ξ_{F_V/F_U} が $\Lambda(U/V)_S^\times$ の元として構成されること [DR] に注意すると，非可換拡大 F_∞/F に付随する p-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ は全ての $\mathfrak{F}_B$ の元に対して $\theta_{S,U,V}(\xi_{F_\infty/F})=\xi_{F_V/F_U}$ を満たす $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元として特徴付けることが出来る (「p-進ゼータ擬測度の〈貼り合わせ〉」，詳細は論文第 2 節参照)．他方，非可換岩澤主予想は標準オーレ局所化 $\Lambda(G)\to\Lambda(G)_S$ に付随するワイベル-ヤオの局所化完全系列の連結準同型 $\partial\colon K_1(\Lambda(G)_S)\to K_0(\Lambda(G),\Lambda(G)_S)$ によって p-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ が $-[C_{F_\infty/F}]$ にうつされるという形で定式化される ($C_{F_\infty/F}$ はネコヴァールのセルマー複体の双対複体．定義等は論文第 1 節参照)．したがって主定理の証明は

$$\begin{aligned}\theta_{S,U,V}(\xi_{F_\infty/F})&=\xi_{F_V/F_U}\qquad\text{for all } (U,V)\in\mathfrak{F}_B,\\ \partial(\xi_{F_\infty/F})&=-[C_{F_\infty/F}]\end{aligned}$$

を満たす元 $\xi_{F_\infty/F}$ を構成するという純粋に線形代数的な問題に帰着される．このような元の構成は主に以下の二つのステップを通じて実現されるであろうことが容易に観察される (実際には技術的理由からバーンズ-加藤のダイアグラム・チェイシングを用いた議論を展開する．論文第 2 節参照);

ステップ 1, $\theta_S=(\theta_{S,U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}\colon K_1(\Lambda(G)_S)\to\prod_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}\Lambda(U/V)_S^\times$ の《像》Ψ_S の計算;
ステップ 2, $(\xi_{F_V/F_U})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}$ が Ψ_S に含まれることの証明.

論文第 4 節–第 7 節が ステップ 1 に，論文第 8 節，第 9 節が ステップ 2 にそれぞれ相当している.

ステップ 1 はオリヴァー-テイラーの整対数準同型写像 [Oliver] を用いてトレース写像の像をノルム写像の像に翻訳することにより実行され，結果として θ_S の像を含む明示的に特徴付けられる群 Ψ_S が得られる. Ψ_S の元は各成分同士のノルム関係式，共役関係式 (以上は自明な関係式) 及び合同関係式 (非自明な関係式) によって特徴付けられる (詳細は第 7 節参照．Ψ_S は殆ど θ_S の像と一致すると期待される).

ステップ 2 では各 p-進ゼータ擬測度 ξ_{F_V/F_U} が Ψ_S の元を特徴付けている関係式を満たすかどうかを確かめることになる．条件式のうちノルム関係式及び共役関係式は p-進ゼータ擬測度の補間性質による特徴付けを用いた形式的な計算で容易に確認出来るが，合同関係式は複雑な形をしており直接正当化することは困難で

あった．そこで本論文では帰納的な構成を行うことでこの困難を回避した (論文第 9 節)．具体的には，G^f の非自明な中心元で G^f の交換子群に含まれるものをとり $\bar{G} = G/\langle c\rangle$ とおくと，G の有限部分の位数に関する帰納法により $K_1(\Lambda(\bar{G})_S)$ には非可換拡大 $F_{\langle c\rangle}/F$ に付随する p-進ゼータ関数 $\xi_{F_{\langle c\rangle}/F}$ が既に構成されているとして良い．この $\xi_{F_{\langle c\rangle}/F}$ の存在を用いて合同関係式をより単純なものに帰着し，ドリーニュ-リベの q-展開原理 [DR] を用いて単純化された合同関係式を証明すること (論文第 8 節) によって F_∞/F に付随する p-進ゼータ関数の構成は完成される．

なお，ステップ 1 の計算の中で対数写像を用いる関係上 p-捩れ部分の不定性が生じてしまうので，上記の構成で得られる p-進ゼータ関数も p-捩れ部分の不定性を孕んでしまう．この不定性はリッター-ヴァイス型非可換拡大に付随する p-進ゼータ関数の存在 [RW1] を用いて取り除くことが出来る (論文第 9.3 節)．

因みに総実代数体の非可換岩澤主予想は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_{cyc}/F を含む任意の総実な p-進リー拡大に対してリッター-ヴァイス [RW2] 及びマヘシュ・カクデ [Kakde2] によって 2010 年に独立に証明されたが，その本質的な部分である 1 次元副 p p-進リー拡大に付随する p-進ゼータ関数の構成に関しては両者の結果とも帰納法を用いている．帰納法を用いることによってさらに複雑な拡大に対して段階的に p-進ゼータ関数を構成出来ることを明らかにした最初の結果が本論文 (及び先行研究 [H]) であることを加味すると，本論文の主結果が一般の場合の証明の進展に果たした役割は少なくないと考えられる．

参考文献

[CFKSV] John Henry Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob, *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101** (2005) 163–208.

[DR] Pierre René Deligne and Kenneth Alan Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math., **59** (1980) 227–286.

[H] Takashi Hara, *Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p-extensions*, J. Number theory, **130**, Issue 4 (2010) 1068–1097.

[Kakde1] Mahesh Kakde, *Proof of the main conjecture of noncommutative Iwasawa theory for totally real number fields in certain cases*, preprint (2008) `arXiv:0802.2272v2[math.NT]`, to appear in J. Alg. Geom.

[Kakde2] Mahesh Kakde, *The main conjecture of Iwasawa theory for totally real fields*, preprint, `arXiv:1003.3772v1[math.NT]` (2010).

[Kato] Kazuya Kato, *Iwasawa theory of totally real fields for Galois extensions of Heisenberg type*, preprint.

[Oliver] Robert Oliver, *Whitehead groups of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **132** (1988) Cambridge Univ. Press.

[RW1] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *Equivariant Iwasawa theory: an example*, Doc. Math., **13** (2008) no. 4, 715–725.

[RW2] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *On the 'main conjecture' of equivariant Iwasawa theory*, preprint (2010) `arXiv:1004.2578v2[math.NT]`.