論文の内容の要旨

論文題目
Dispersive and Strichartz estimates for Schrödinger equations (シュレディンガー方程式に対する分散型及びストリッカーツ評価)

水谷 治哉

本論文では時間依存シュレディンガー方程式の解の平滑化作用, 特に以下の 2 つの評価について考察する.

- **分散型評価**.
- **ストリッカーツ評価**.

分散型評価は解の時刻無限大での減衰あるいは有界性を表す評価であり, ストリッカーツ評価は L^p 型平滑化作用と見ることができる. これらの評価は固有関数（あるいは quasimode）の L^p 有界性の解析や非線形シュレディンガー方程式の解析に応用されている. 本論文の目的は「多様体の幾何構造やポテンシャルの挙動がこれらの評価にどのような影響を与えるか？」という問いについて論じることである. 具体的には, 以下の 2 つのモデルについて考察する:

- **散乱多様体上のシュレディンガー方程式 (第 2 章)**.
- **遠方で減衰する実数値ポテンシャルを摂動した 1 次元シュレディンガー方程式 (第 3 章)**.

1 散乱多様体上のストリッカーツ評価

第 2 章では散乱多様体上のシュレディンガー方程式に対する時間局所ストリッカーツ評価について論じる. 散乱多様体とは境界付きコンパクト多様体の一つのクラスであるが (cf. Melrose (1994)), ここでは極座標の一般化として定式化する. M をコンパクトでない d 次元 C^∞ リーマン多様体 ($d \ge 2$) として次の分解を仮定する:

$$M = M_c \cup M_\infty,\ M_c \Subset M,\ M_\infty \cong (0,\infty) \times \partial M \ni (r,\theta),\ M_c \cap M_\infty \subset (0,1) \times \partial M.$$

ここで M_c は相対コンパクトな部分多様体, ∂M は任意の $d-1$ 次元閉多様体である. 次に, 散乱計量を定義する.

Definition 1.1 (散乱計量)**.** M 上のリーマン計量 g が (長距離型) 散乱計量であるとは次で定義される: ある ∂M 上のリーマン計量 (h_{jk}) が存在して

$$g := dr^2 + r^2(h_{jk}(\theta) + a_{jk}(r,\theta))d\theta^j d\theta^k, \quad (r,\theta) \in (1,\infty) \times \partial M.$$

ここで a_{jk} は滑らかな実数値関数で, ある正の定数 $\mu > 0$ が存在して,

$$|\partial_r^l \partial_\theta^\alpha a_{jk}(r,\theta)| \le C_{l\alpha} r^{-\mu-l}, \quad (r,\theta) \in (1,\infty) \times \partial M, \quad (l,\alpha) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^{d-1}.$$

上記をみたす (M, g) を (長距離型) 散乱多様体と呼ぶ. 定義から散乱計量 g の主要部は錐型計量であり, 散乱多様体は漸近的に錐型多様体に近づく. 特に, ユークリッド空間の長距離摂動は $M = \mathbb{R}^d$, $\partial M = \mathbb{S}^{d-1}$ ととることにより散乱多様体とみなすことができる.

$L^p(M) := L^p(M; G(z)dz)$, $G(z) = \sqrt{\det(g_{jk}(z))}$, $1 \le p \le \infty$ として, 散乱多様体 M 上のシュレディンガー方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,z) = Pu(t,z), \ (t,z) \in \mathbb{R} \times M, \\ \quad u|_{t=0} = u_0 \in L^2(M). \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $P = -\frac{1}{2}\Delta_g$, Δ_g は M 上の Laplace-Beltrami 作用素である. P は $C_0^\infty(M)$ 上本質的自己共役であり, (1.1) の解は $u(t) = e^{-itP}u_0$ で与えられる. 主結果を述べる前に用語を 2 つ定義する. まず計量の非捕捉性について述べる:

Definition 1.2 (非捕捉性)**.** $p(z, \xi)$ を P の主シンボルとする. 任意の $(z_0, \xi^0) \in T^*M$, $\xi^0 \ne 0$ に対して, $p(z, \xi)$ が生成する測地流 $(z(t, z_0, \xi^0), \xi(t, z_0, \xi^0)) = \exp tH_p(z_0, \xi^0)$ が $t \to \pm\infty$ で無限遠方に発散する, 即ち

$$|z(t, x_0, \xi^0)| \to +\infty \text{ as } t \to \pm\infty$$

が成り立つとき (M, g) は非捕捉的であると言う. ここで,

$$H_p = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial z^j} - \frac{\partial p}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

は $p(x, \xi)$ が生成するハミルトンベクトル場である.

次に, admissible と呼ばれる概念を導入する.

Definition 1.3 (Admissible pair)**.** 実数の組 (p, q) が admissible pair であるとは,

$$2 \le p, q \le \infty, \quad \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad (d, p, q) \ne (2, 2, \infty)$$

を満たすときに言う. 特に, $d \ge 2$ のとき $(2, \frac{2d}{d-2})$ を end point と呼ぶ.

第 2 章の主結果は以下の通りである:

Theorem 1.4 (論文 Theorem 2.1.1 及び Theorem 2.1.2)**.** ある十分大きなコンパクト集合 $K \subset M$ と K 上で $\chi \equiv 1$ となる実数値関数 $\chi \in C_0^\infty(M)$ が存在して, 任意の $T > 0$ と *admissible pair* (p, q) に対して,

$$||(1 - \chi_K)e^{-itP}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(M))} \le C_{KTpq}||u_0||_{L^2(M)}, \ u_0 \in C_0^\infty(M), \tag{1.2}$$

が成立する. さらに (M, g) が非捕捉的ならば全空間での評価が成立する :

$$||e^{-itP}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(M))} \le C_{Tpq}||u_0||_{L^2(M)}, \ u_0 \in C_0^\infty(M). \tag{1.3}$$

Remark 1.5. (1) 定理から (少なくとも散乱多様体の場合には) 遠方での時間局所ストリッカーツ評価は多様体の捕捉性に影響されないことがわかる.

(2) (1.2) の証明には解の超局所的な分散性を本質的に用いる. より正確に言えば, (1.2) は空間およびエネルギーを局所化した解の分散型評価を用いて証明する.

(3) (ポテンシャル摂動) 以下を満たす短距離型ポテンシャル $V \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ を摂動した作用素 $P + V$ に対しても (1.2), (1.3) と同様の不等式を証明することができる.

$$|\partial_r^l \partial_\theta^\alpha V(r, \theta)| \le C_{l\alpha} r^{-1-\nu-l}, \quad (r, \theta) \in (1, \infty) \times \partial M, \quad (l, \alpha) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^{d-1}, \ \nu > 0.$$

2 散乱解の漸近展開

第 3 章では $\mathbb{R}$ 上のポテンシャルを摂動したシュレディンガー方程式:

$$\begin{cases} i\partial_t u = Hu, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{2.1}$$

に対する散乱解の重み付き分散型評価と漸近展開について論じる．ここで $V \in L^1_1(\mathbb{R})$ をみたす実数値関数 V に対して, シュレディンガー作用素

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$$

は $L^2(\mathbb{R})$ 上の 2 次形式

$$Q(u) = \int (|u'(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2)dx, \quad u \in D(Q) = H^1(\mathbb{R}),$$

に付随する自己共役作用素として定義する．ただし, $L^1_s(\mathbb{R})$ は重み付き L^1 空間である:

$$L^1_s(\mathbb{R}) = \{f | \langle x\rangle^s f \in L^1(\mathbb{R})\}, \quad ||f||_{L^1_s(\mathbb{R})} = ||\langle x\rangle^s f||_{L^1(\mathbb{R})}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}.$$

上記の V に対する仮定の下で, H のスペクトルは絶対連続スペクトル $[0,\infty)$ と高々有限個の単純な負の固有値から成ることが知られている．まず H のレゾナンスを次で定義する:

Definition 2.1. (1) (Jost 関数). $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の定常シュレディンガー方程式

$$Hf(\lambda, x) = \lambda^2 f(\lambda, x),$$

および無限遠方における漸近条件

$$|f_\pm(\lambda, x) - e^{\pm i\lambda x}| \to 0 \text{ as } x \to \pm\infty,$$

をみたす解 $f_\pm(\lambda, x)$ を Jost 関数と呼び, そのロンスキー行列式を

$$W(\lambda) := f_+(\lambda, x)\cdot \partial_x f_-(\lambda, x) - \partial_x f_+(\lambda, x)\cdot f_-(\lambda, x).$$

で定義する．

(2) (レゾナンス). $W(0) \neq 0$ のときポテンシャル V は generic type であると言い, $W(0) = 0$ のとき V は exceptional type であると言う．V が exceptional type のとき, 連続スペクトルの端点 (ゼロエネルギー) は H のレゾナンスあると言う．

Remark 2.2. (1) $V \in L^1_1(\mathbb{R})$ ならば, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して Jost 関数は一意に存在する．また, $\lambda \neq 0$ に対して $W(\lambda) \neq 0$ である．

(2) ゼロエネルギーが H のレゾナンスであることと方程式 $Hf = 0$ が有界な解 $f \neq 0$ を持つことは同値になる．特に, $V \equiv 0$ は exceptional type である．

P_{ac} を H の絶対連続部分空間への射影とする．散乱解 $e^{-itH}P_{ac}u_0$ の分散型評価

$$||e^{-itH}P_{ac}u_0||_{L^1(\mathbb{R})} \le C|t|^{-\frac{1}{2}}||u_0||_{L^1(\mathbb{R})}, \quad u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \quad |t| \neq 0,$$

は Weder (1999), Goldberg-Schlag (2004) によってすでに証明をされている．第 3 章の主結果は高階部分についての漸近展開である．

Theorem 2.3 (論文 Theorem 3.1.2)**.** $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ とし, $V \in L^1_{2m+2}(\mathbb{R})$ (ゼロエネルギーが H のレゾナンスでない場合は $V \in L^1_{2m}(\mathbb{R})$) と仮定する. また, $s = 2m$ (ゼロエネルギーが H のレゾナンスでない場合は $s = 2m - 1$) とする. このとき,

$$||\langle x\rangle^{-s}(e^{-itH}P_{ac} - P_{m-1})u_0||_{L^\infty} \le C|t|^{-\frac{1}{2}-m}||\langle x\rangle^s u_0||_{L^1}, \quad u_0 \in L^1_s(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \quad |t| \neq 0.$$

ここで, P_{m-1} は

$$P_{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} t^{-\frac{1}{2}-j} C_{j-1}$$

と展開される. また, 係数 C_{j-1} は次をみたす.
(1) 一般の場合:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} C_{j-1} &\le 2j+1, \quad j = 0, 1, ..., m-1, \\ ||\langle x\rangle^{-2j} C_{j-1}u_0||_{L^\infty} &\le C||\langle x\rangle^{2j}u_0||_{L^1}, \quad j = 0, 1, ..., m-1. \end{aligned}$$

(2) ゼロエネルギーが H のレゾナンスでない場合:

$$\begin{aligned} C_{-1} &\equiv 0, \\ \operatorname{rank} C_{j-1} &\le 2j, \quad j = 1, 2, ..., m-1, \\ ||\langle x\rangle^{-2j+1} C_{j-1}u_0||_{L^\infty} &\le C||\langle x\rangle^{2j-1}u_0||_{L^1}, \quad j = 1, 2, ..., m-1. \end{aligned}$$

Theorem 2.3 から, ゼロエネルギーが H のレゾナンスでない場合に, 次の重み付き分散型評価が導かれる:

$$||\langle x\rangle^{-1}e^{-itH}P_{ac}u_0||_{L^\infty} \le C|t|^{-\frac{3}{2}}||\langle x\rangle u_0||_{L^1}, \quad u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \quad t \neq 0.$$

特に, この評価から散乱解は重み付き空間上で自由解よりも速く時間減衰することがわかる. また, Theorem 2.3 の Corollary として局所エネルギーの減衰評価も得られる:

Corollary 2.4 (論文 Corollary 3.1,4)**.** m, V は Theorem 2.3 の仮定をみたすとする. $s = 2m + 1/2$ (ゼロエネルギーが H のレゾナンスでない場合は $s = 2m - 1/2$) ととる. このとき,

$$e^{-itH}P_{ac} = \sum_{j=0}^{m-1} t^{-\frac{1}{2}-j}C_{j-1} + O(t^{-\frac{1}{2}-m}) \quad in \quad \mathcal{L}(L^2_s(\mathbb{R}), L^2_{-s}(\mathbb{R})), \quad t \to \infty.$$

ここで, $L^2_s(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \langle x\rangle^{2s}dx)$.

Corollary 2.4 はすでに知られている結果であるが (cf. 村田 (1982)), ゼロエネルギーがレゾナンスでない場合に, 既存の結果よりもポテンシャルおよび重みに対する仮定が一部改善されている.