論文の内容の要旨

論文題目: Rigidity theorems for universal and symplectic universal lattices
(普遍格子と斜交普遍格子の剛性定理)
氏名: 見村万佐人

本学位論文では, 普遍格子 (*universal lattice*) および斜交普遍格子 (*symplectic universal lattice*) のコホモロジーの観点からの剛性を示した. さらに, それらの結果を群作用の剛性に応用した. 具体的には, これらの群から次の群への準同型の像が常に有限であることを証明した: (i) 円周上の (低階数の) 微分同相群; (ii) コンパクトで向きづけられた曲面の写像類群; (iii) 自由群の (外部) 自己同型群.

Kazhdan の性質 (T) は Kazhdan ([Kaz]) により導入された性質であり, 局所コンパクトかつ σ-コンパクト群では以下で定義される性質 (FH) と同値である. Bader-Furman-Gelander-Monod ([BFGM]) は性質 (FH) を一般化し, 一般のバナッハ空間 (ないしはバナッハ空間の族)B に対して下のように定義される性質 (F_B) を定義した:

定義 1 (i) 群 G が性質 (FH) をもつとは、任意の G の (強連続) ユニタリ表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ に対し, π 係数の 1 次元 (連続) コホモロジー $H^1_{\mathrm{c}}(G;\pi) = 0$ となることである.

(ii) 群 G が性質 (F_B) をもつとは、バナッハ空間 B 上の任意の G の (強連続) 等長表現 ρ に対し, $H^1_{\mathrm{c}}(G;\rho) = 0$ となることである.

性質 (T) を満たす非コンパクト群の例として, (a) 各因子の実ランクが 2 以上の半単純 Lie 群やその格子 ($\mathrm{SL}_{m\geq 3}(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_{m\geq 3}(\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}])$, $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{F}_2[x])$ $(m \geq 2)$ など); (b) ある種の (Gromov の意味での) 双曲群 (ある種の "ランダム群" や $\mathrm{Sp}_{m,1}$ $(m \geq 2)$ など) が挙げられる. 性質 (T) は群の著しい剛性を表わす.

性質 (F_B) の研究で特に興味をもたれているケースが, B として L^p 空間たちのなす族 $\mathcal{L}_p$ をとった場合である (ここで p は $1 < p < \infty$ を満たす, 固定された実数である). 背景としては, G が半単純 Lie 群などの場合にこの性質が微分形式から定まる L^p-コホモロジーと関係があることや, 次の事実がある:

定理 2 ([BoPa]; [Pan]) *任意の (無限) 双曲群 (性質 (T) をもってもよい)H に対しそれぞれ $p \gg 2$ が存在して, H は $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$ を満たさない; 特に, $\mathrm{Sp}_{m,1}$ は $p > 4m + 2$ で $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$ を満たさない.*

どの p に対しても $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$ は (T) を導くことも知られているので, $p \gg 2$ のとき性質 $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$ は (T) より真に強い. 一方で, $\mathrm{SL}_{m\geq 3}(\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}])$ など, 上の例 (a) で挙げた群は任意の p で $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$ を満たす ([BFGM]).

普遍格子とは, $\mathrm{SL}_{m\geq 3}(\mathbb{Z}[x_1, \ldots x_k])$ の形の群のことである (k は自然数). 普遍格子が群が性質 (T) をもつことは Shalom[Sha] と Vaserstein[Vas] により 2006 年に示された. 性質 (T) は商群に遺伝するので, この結果から上記の例 (a) にある群 $\mathrm{SL}_{m\geq 3}(\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}])$ のような, 有限生成可換環の基本行列群 (基本行列たちで生成される群) は $m \geq 3$ で全て性質 (T) をもつことがわかる (これが "普遍格子" の名の由来である.) 本学位論文で, B として上記 $\mathcal{L}_p$, 可分ヒルベルト空間上の p-シャッテン作用素の空間 C_p をとった場合を考察した. さらに, $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Z}[x_1, \ldots x_k])$ $(m \geq 2)$ の形の群を斜交普遍格子と呼び, この場合も調べた. こちらの性質 (T) は Ershov–Jaikin-Zapirain–Kassabov[EJK] による. 本学位論文での結果は以下である:

定理 I (本学位論文 Theorem A, Theorem C, Theorem D) *$m \geq 4$ の普遍格子, $m \geq 3$ の斜交普遍格子は任意の $p \in (1, \infty)$ に対し, 性質 $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$,$(\mathrm{F}_{C_p})$ をもつ: つまりこれらの群を G とし, ρ を L^p ないし C_p 上の G-等長表現とすると*

$$H^1(G; \rho) = 0.$$

次に, 性質 (F_B) の拡張として, 次の性質 (FF_B) を定義した. また, 技術的な理由により, 次の性質 $(\mathrm{FF}_B)/\mathrm{T}$ も定義した (記号の中の /T は "自明表現を mod out する" ことを表す). 特に B としてヒルベルト空間たちの族をとったときは, Monod [Mon1] により以前に性質 (TT) として定義されている.

定義 3 (本学位論文) B をバナッハ空間またはそれらのなす族とする.

(i) 群 G が性質 (FF_B) をもつとは、B 上の G の任意の (強連続) 等長表現 ρ に対し, 擬 ρ-コサイクルが必ず有界となることである.

(ii) 群 G が性質 $(\mathrm{FF}_B)/\mathrm{T}$ をもつとは、B 上の G の任意の (強連続) 等長表現 ρ に対し, 次が成り立つことである : "任意の擬 ρ-コサイクル b に対し, 商バナッハ空間への自然な射影 $B \to B/B^{\rho(G)}$ での b の像が必ず有界となる." ここで $B^{\rho(G)}$ は $\rho(G)$-不変なベクトルたちのなす B の閉部分空間である.

ここで連続写像 $b\colon G \to B$ が擬 ρ-(1-) コサイクルとは

$$\sup_{g,h\in G} \|b(gh) - b(g) - \rho(g)b(h)\| < \infty$$

を満たすことをいう. 性質 $(\mathrm{FF}_B)/\mathrm{T}$ は定義上は (FF_B) より弱いが, 真に弱いかどうかは分かっていない. (FF_B) は次のように, 有界コホモロジーと関係している: 群 G のバナッハ表現 (ρ, B) 係数の有界コホモロジー (*bounded cohomology*) とは, 標準複体に「有限の像をもつ」という条件を課して得られる複体のコホモロジーである. この複体から標準複体に自然な包含があるので, この包含写像は有界コホモロジーから通常のコホモロジーへの写像

$$\Psi^\bullet_{\mathrm{cb}}\colon H^\bullet_{\mathrm{cb}}(G;\rho) \to H^\bullet_{\mathrm{c}}(G;\rho)$$

を誘導する. この写像は比較写像 (*comparison map*) と呼ばれ, 一般には単射でも全射でもない. しかし, 群 G が性質 (FF_B) をもつなら, B 上の任意の (強連続) 等長表現 ρ に対し, 2 次の比較写像

$$\Psi^2_{\mathrm{cb}}\colon H^2_{\mathrm{cb}}(G;\rho) \to H^2_{\mathrm{c}}(G;\rho)$$

は必ず単射になる. 性質 (FF_B), $(\mathrm{FF}_B)/\mathrm{T}$ に関連して, 本学位論文では次も示した:

定理 II (本学位論文 Theorem B, Theorem C, Theorem D) $m \geq 4$ の普遍格子, $m \geq 3$ の斜交普遍格子は任意の $p \in (1,\infty)$ に対し, 性質 $(\mathrm{FF}_{\mathcal{L}_p})/\mathrm{T}$,$(\mathrm{FF}_{C_p})/\mathrm{T}$ をもつ.

また m の (定義で述べた以外の) 制限なしで, 任意の普遍格子ないしは斜交普遍格子 G は性質 $(\mathrm{TT})/\mathrm{T}$ をもつ. とくに π をユニタリ G-表現で $\pi \not\supseteq 1_G$ なるものとすると, 2 次の比較写像

$$\Psi^2_{\mathrm{b}}\colon H^2_{\mathrm{b}}(G;\pi) \to H^2(G;\pi)$$

は単射である.

本定理では $(\pi, \mathfrak{H}) = (1_G, \mathbb{R})$ のときをカバーできていない．実はこのときが一番難しいということが判った．$H^2_{\mathrm{b}}(G; 1_G) = H^2_{\mathrm{b}}(G)$ のように書くことにする．自明表現の擬コサイクルを擬準同型 (*quasi-homomorphism*) という．つまり群 G 上の擬準同型とは, 写像 $\phi\colon G \to \mathbb{R}$ であって,

$$\sup_{g,h\in G} |\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)| < \infty$$

なるものをいう．擬準同型 ϕ が自明とは, ϕ とある準同型 $f\colon G \to \mathbb{R}$ の差が一様有界であることをいう．Bavard の双対定理とよばれる定理から, 以下で定義する安定交換子長 (*stable commutator length*) と次の関係がある:

定理 4 ([Bav]) 離散群 G に対し, 以下の 2 条件は同値 :

(i) 交換子群 $[G, G]$ 上で定義される, 安定交換子長

$$\mathrm{scl}(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n}$$

が恒等的に 0 (ここで cl は交換子長).

(ii) G 上の任意の擬準同型が自明である．この条件は

$$\Psi^2_{\mathrm{b}}\colon H^2_{\mathrm{b}}(G) \to H^2(G)$$

が単射であることと同値である.

普遍格子での擬準同型に関する満足いく結果を得るには届かないが, ユークリッド整域上の基本線型群 (この場合, 特殊線型群と一致する) のときに, 次を示す事ができた:

定理 III (本学位論文 Theorem E) A をユークリッド整域, $m \geq 6$ とすると $G = \mathrm{SL}_m(A)$ を離散群と見たとき, 比較写像

$$\Psi^2_{\mathrm{b}}\colon H^2_{\mathrm{b}}(G) \to H^2(G)$$

は単射である. 特に $A = K[x]$, K は素体からの超越拡大次数が無限であるような体 (例えば $\mathbb{C}$ など．可算な体もある) とすると, G は以下の 2 性質をともに満たす:

(1) $\sup_{g\in[G,G]} \mathrm{cl}(g) = \infty$;

(2) 任意の $g \in [G, G](= G)$ で,

$$\mathrm{scl}(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^n)}{n} = 0.$$

定理 III の性質 (1), (2) を同時に満たす群があるかは Abért が問題にしていて, Monod が ICM 2006 での招待講演 [Mon2] で “Abért の問題”として提起した. 上の結果は Muranov[Mur] の結果と並んでそのような例を与えている.

最後に, 定理 I, 定理 II を群作用に応用した:

定理 IV (本学位論文 Theorem F, Theorem G)

(i) $m \geq 4$ の普遍格子ないし $m \geq 3$ の斜交普遍格子の指数有限の部分群を Γ とする. 任意の $\alpha > 0$ に対し, 準同型

$$\Gamma \to \mathrm{Diff}_{+}^{1+\alpha}(\mathrm{S}^1)$$

の像は有限.

(ii) 普遍格子ないし斜交普遍格子の指数有限の部分群を Γ とする. 任意の自然数 $g \geq 1$, $n \geq 2$ に対し, 準同型

$$\Gamma \to \mathrm{MCG}(\Sigma_g),$$

および, 準同型

$$\Gamma \to \mathrm{Out}(F_n)$$

の像は有限.

ここで S^1 は円周, $\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ は種数 g の閉コンパクトで向きのついた曲面の写像類群, $\mathrm{Out}(F_n)$ は自由群の外部自己同型群である. (i) の証明では性質 $(\mathrm{F}_{\mathcal{L}_p})$ が; (ii) の証明では性質 (TT)/T が活躍する. さらにそれぞれ, Navas [Nav]; Hamenstädt [Ham], Bestvina–Bromberg–藤原耕二 [BBF] の各定理が証明のキーとなる.

参考文献

[BFGM] U. Bader, A. Furman, T. Gelander and N. Monod, Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces. *Acta Math.* **198**, no.1, 57–105 (2007)

[Bav] Ch. Bavard, Longueur stable des commutateurs. *L'Enseign. Math.* **37**, nos. 1-2, 109–150 (1991)

[BBF] M. Bestvina, K. Bromberg and K. Fujiwara, forthcoming paper

[BoPa] M. Bourdon and H. Pajot, Cohomologie l_p et espaces de Besov. *J. reine angew. Math.* **558**, 85–108 (2003)

[EJK] M. Ershov, A. Jaikin-Zapirain and M. Kassabov, Property (T) for groups graded by root systems. Preprint, arXiv:1102.0031

[Ham] U. Hamenstädt, Bounded cohomology and isometry groups of hyperbolic spaces. *J. Eur. Math. Soc.* **10**, 315–349 (2008)

[Kaz] D. A. Kazhdan, Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funct. Anal. Appl.* **1**, 63–65 (1967)

[Mon1] N. Monod, *Continuous bounded cohomology of locally compact groups.* Springer Lecture notes in Mathematics, 1758, 2001

[Mon2] N. Monod, An invitation to bounded cohomology. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006 Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 1183–1211 (2006)

[Mur] A. Muranov, Finitely generated infinite simple groups of infinite square width and vanishing stable commutator length. *J. Topol. Anal.* **2**, no. 3, 341–384 (2010)

[Nav] A. Navas, Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **35**, 749–758 (2002)

[Pan] P. Pansu, Cohomologie L^p: invariance sous quasiisométrie. preprint, 1995

[Sha] Y. Shalom, The algebraization of Kazhdan's property (T). In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006 Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 1283–1310 (2006)

[Vas] L. Vaserstein, Bounded reduction of invertible matrices over polynomial ring by addition operators. preprint, 2007