

論文審査の結果の要旨

氏名 柳 青

非線形偏微分方程式の解の性質を調べることは、自然科学・工学や社会科学にとって重要な課題である。しかし、一般には解を単純な式で表すことができず、そのため各分野での難題になっている。そのような状況の中で漸近解析の方法や、問題の特性を反映したさまざまな解の表現公式を導出することは可能であれば極めて有用で、どちらも非線形解析の重要な手法である。

本博士論文では、次の 2 つのテーマを扱っている。

- (1) 一般の非線形楕円型方程式について、その解の決定論的離散的微分ゲームによる近似表現とその応用
- (2) 非強圧的ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動の解析

第 1 のテーマで扱われている主要な方程式は平均曲率流方程式である。金属の焼きなまし時の粒界の動きを記述する平均曲率流方程式は、広く研究され等高面法による広義解の概念が確立されている。画像処理におけるノイズの除去などさまざまな分野への応用も広い。しかし、その等高面方程式の解に対して決定論的離散的微分ゲームの価値関数で近似できることがわかったのは、ごく最近のことである。というのは、決定論的連続的微分ゲームを常微分方程式について考えても価値関数は 2 階の微分方程式の解とはならないからである。本博士論文では、この問題にノイマン境界条件付の問題に対し、ピリアードを用いた決定論的離散的微分ゲームを考案し、その価値関数によりもとの問題の解で近似可能であることを示した。境界条件付の問題のゲームによる解釈として注目される結果であった。

平均曲率流方程式は、その等高面法による広義解は一意的であるが曲面としての解は一般に一意性は成り立たない。等高面法的な考えでは曲面をゼロ等高面とする関数のゼロ等高面が内点を含む、いわゆる肥満現象に対応している。肥満現象が起きること自身はよく知られているが厳密な証明は非線形放物型方程式の一般論を用いる必要があった。本博士論文では、この方程式の解を決定論的離散的微分ゲームで近似し、その価値関数をさまざまな戦略を考えることにより評価し、結果として肥満現象の存在を放物型方程式の一般論を用いずに、粘性解理論の枠組の中で証明することに成功した。また、対応する定常問題の比較原理の成立、不成立の問題が、この肥満現象と深く関係のあることを示した。これにより比較定理が成り立たない例のあることを示し、未解決問題を一部解決した。これらの結果は大変重要で既に論文に引用されるなど評価は高い。さらに保存則方程式のように粘

性解理論では扱いにくい方程式に対して離散スキームを構成し、不連続解の近似解を構成した。このように第 1 のテーマに関しての成果は極めて独創性が高いと考えられる。

第 2 のテーマであるハミルトン・ヤコビ方程式の時間無限大での漸近挙動はハミルトニアンが強圧的な場合よく調べられていて先行結果も多い。しかし、結晶成長の問題ではハミルトニアンが非強圧的な場合を扱う必要に迫られる。強圧的な場合は周期境界条件を課した場合、一定の速度で安定な形状に近づくことが知られているが、非強圧的な場合は必ずしもそうはならない。

本博士論文では、非強圧的な方程式の解の漸近挙動の持つ特有な性質としてある領域の中では解は一定のスピードで安定状態に収束し、その他では、そうならない領域があることを発見した。このような領域を有効領域とよんでいる。有効領域での解の収束を示すには従来用いられていたリップシツツ評価を導くことによる証明は不可能で、全く異なる考え方が必要であった。また、極限の形状を決定する定常問題も有効領域の境界で特異ノイマン条件や特異ディリクレ条件を課された問題になっているので、その解の特徴づけ等従来ほとんど研究されていない境界値問題を考察する必要があった。

本博士論文では、空間 1 次元の初期値ディリクレ境界値問題を考察し、初期値ゼロの場合に得られた結果を一般化し、有効領域上での収束定理を得た。また、一般の初期値に対する適合条件を発見した。この結果は動機となった結晶成長学の問題に十分答えている。また空間多次元の場合の初期値問題も考察している。極限の形状の満たす方程式はこの場合特異ノイマン問題になる。この定常問題の解の比較定理を力学理論のオーブリー集合での比較を仮定することにより証明した。(オーブリー集合上での比較が無ければ一般に比較定理は成立しない。) これを用いて、解の漸近挙動を比較関数を巧妙につくることにより、有効領域上で証明することに成功した。

本博士論文は、離散的微分ゲームによる解の表現とその著しい応用に関して、この分野への重要な貢献であると考えられる。また、非強圧的なハミルトン・ヤコビ方程式の解の時間無限大の漸近挙動という新しい分野を切り拓くなど、先駆性も高い。よって論文提出者、柳青は博士(数理学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認めた。