

論文審査の結果の要旨

氏名 佐々田 槇子

論文提出者佐々田槇子が論じた流体力学極限とは、ランダムな構造を含む相互作用系を対象に時空のスケール変換を作用し、局所的なエルゴード性による平均化を経て、非線形偏微分方程式へと導く極限操作のことである。そのルーツは Hilbert 展開等の特異極限による Boltzmann 方程式からの流体の方程式系の導出に見出されるが、それをさらに細かい分子レベルから出発して実行するものである。一般に、このスケール変換は発散項を生むが、それが都合よく他の項に吸収されることがある。そのような系は勾配型とよばれる。勾配型であっても、相互作用による複雑な項を含み、その長時間にわたる時間平均を平衡系のアンサンブル平均で置きかえる局所エルゴード性を示す必要がある。しかしながら勾配系は特殊な場合であり物理的に自然なモデルは殆どの場合、発散項がそのまま残るいわゆる非勾配型の系になる。

非勾配型の系を初めて数学的に厳密に扱ったのは Varadhan (1993) であるが、彼の手法は極めて難解で、エントロピー不等式・Feynman-Kac 公式によるある種の作用素のスペクトルの評価への帰着、さらに長時間平均の下での中心極限定理分散の評価への帰着等のステップを経た後に、この中心極限定理分散の定めるノルムの下で発散項が“勾配型の項+揺動項”で近似できることを示す。そのためには、ある種の無限次元空間上の閉形式を完全に特徴付ける必要があり、それには相互作用系を有界領域に閉じ込めたときの生成作用素のスペクトルの跳びを正確に求めることが要請される。加えて、局所エルゴード性の精密化、系の緊密性、極限の非線形偏微分方程式の係数の正則性と弱解の一意性などを示す必要がある。これらすべてのステップを個々の系で完全に証明し切ることは、系が複雑になるとともに困難になる。

論文提出者は、提出論文において非勾配型の系について以下の3つの結果を得た。

まず第1に、左右に向き付けられた速度付き1次元格子気体モデルの流体力学極限を示した。格子空間上を相互作用しながらランダムウォークする粒子系を格子気体モデルとよぶ。格子気体モデルの中でも、対称単純排他過程と完全非対称単純排他過程は多くの研究がなされているが、本論文で扱った速度付き格子気体モデルはその中間に位置し、時間的に非可逆な非勾配型の系である。論文提出者は Varadhan の手法を拡張し、流体力学極限を証明することに成功した。極限で得られる非線形拡散方程式の拡散係数は、

変分原理によって特徴付けられるが、その上下からの評価を与え解の性質に関する考察を行った。

第2に、確率的摂動をもつ振動子鎖について平衡揺動定理を示した。Hamilton 方程式で定まる微視的な系から巨視的なエネルギーの時間発展に対する拡散方程式を導出することは、非平衡統計力学における最も重要な問題の一つである。1次元の振動子鎖は、この問題の考察のための単純なモデルとして用いられてきた。論文提出者は、系に十分なエルゴード性を与える確率的な摂動を加えることで、1次元の振動子鎖におけるエネルギーの拡散現象に対する数学的に厳密なアプローチを行い、平衡揺動定理を示した。これもやはり、時間的に非可逆な非勾配型の系である。平衡揺動定理は、流体力学極限が大数の法則であるのに対し、中心極限定理に相当するものである。

第3に、多種粒子系について生成作用素のスペクトルの跳びを考察した。それは領域の1辺の長さを l とするとき C/l^2 のオーダーになるが、定数 C の空サイトの密度への依存性を詳しく調べ、1種粒子系の場合とは本質的に異なる特性を見出した。非勾配型の系に対する流体力学極限の証明では、緩和時間（スペクトルの跳びの逆数）の上からの評価が重要な役割を果たす。多種粒子系は異なる物理的性質を持ついくつかの種類が粒子により構成される系である。

これらはいずれも重要な結果であり、非勾配型の系に対する流体力学極限の研究において新しい視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により、論文提出者佐々田槇子は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。