

審査の結果の要旨

論文提出者 相島 健助

行列の特異値および固有値の数値計算法は、理工学分野を始め、様々な分野で用いられており、その研究の重要性は論を俟たないであろう。

特異値の数値計算においては、通常、最初に行列を上2重対角化し、この上2重対角行列に対して反復法を適用して特異値を計算する。この反復法として、近年、dqds(differential quotient difference with shifts)法と呼ばれる方法が主流となっている。一方、固有値計算においては、対称行列の場合、行列を3重対角化し、この対称3重対角行列に対して反復法を適用して固有値を計算する。反復法としてはQR法を用いるのが標準的である。非対称行列の場合には、行列を Hessenberg化し、その後QR法を用いる。この数値計算法の反復法部分、dqds法やQR法の収束性は、dqds法やQR法のシフトと呼ばれる量をどのように選ぶか、すなわち、シフト戦略に拠るところが大きく、シフト戦略とその収束性の研究が理論、実験の両面から行われてきた。

本論文は、「行列の特異値および固有値の数値計算アルゴリズムの基礎研究」と題し、上2重対角行列に対するdqds法、および、対称3重対角行列に対するQR法に対して、様々なシフト戦略の収束性を理論的に明らかにしたものである。本論文の特徴は、従来の収束性解析の大半がいわゆる局所的であった、すなわち、十分収束した状況下、1ステップ進んだときの収束性を調べたものであったのに対して、大域的な収束性の解析、すなわち、漸近的にすべてのステップに渡って成立する収束性の解析を行ったという点にある。第1章「はじめに」、第9章「おわりに」を含め、9章からなる。前半2章から5章でdqds法を、後半6章から8章でQR法を扱っている。

第2章「特異値計算のためのdqds法の基本性質」では、dqds法のアルゴリズムとその基本的性質について述べている。特に、論文提出者が修士論文で証明したdqds法の大域的収束定理（dqds法が大域的に収束するためのシフト戦略が満たすべき条件を示したもの）について記されている。

第3章「dqds法における超2次収束シフト戦略」では、大域的に超2次収束が達成される新しいシフト戦略を提案している。従来のシフト戦略の構成法は、反復過程において現れる上2重対角行列の最小特異値のシャープな下界を与える公式を用いるのが標準的であるが、本論文ではdqds法のアルゴリズムから直接的に超2次収束性が期待されるシフトを導出し、実際に、そのシフトが大域的に超2次収束することを示している。

第4章「Rutishauserシフトを用いるdqds法」では、Rutishauserが1960年に提案した局所収束次数が3次のシフトを用い、適切なシフト戦略を作成することにより、dqds法が大域的に3次収束することを証明している。そしてさらに詳細な収束解析を行い、Rutishauserシフトは、シフト戦略において一旦設定されれば、その後の反復でも常に設定されるという著しい性質をもつことが示されている。

第5章「dqds法の実装DLASQルーチンの超2次収束定理」では、線形計算ライブラリLAPACKに実装されているdqds法のルーチン(DLASQ)の収束速度が大域的に超2次であることを示している。

DLASQでは、高速化のため様々なシフトが併用され、そのアルゴリズムは非常に複雑なものとなっている。しかし、本章では、2章で述べた収束定理をもとに比較的単純な議論によって超2次収束性が証明できることが示されている。

第6章「固有値計算のためのQR法の基本性質」では、QR法の歴史やアルゴリズムについて説明し、基本的な収束定理について述べている。

第7章「Wilkinsonシフト付きQR法の収束速度の完全解析」では、対称3重対角行列に対するWilkinsonシフト付きQR法の大域的収束速度の解析を行っている。先行研究により、その大域的収束速度は行列に依存して2次の場合、3次の場合に分類されることが知られていたが、本論文では、先行研究において2次収束までしか理論保証されていない行列の族に3次収束するものが含まれていることを指摘し、大域的収束次数が、2次となる場合、3次となる場合を完全に分類する収束定理を与えている。

第8章「Wilkinson型マルチシフトQR法」では、対称3重対角行列に対するWilkinsonシフトをマルチシフトになるように拡張したWilkinson型マルチシフトQR法を提案し、このWilkinson型マルチシフトQR法が大域的収束することを示している。収束性の良いWilkinsonシフトをマルチシフトに拡張するという発想は甚だ自然であり、Wilkinson型マルチシフトQR法の収束の振る舞いも自然であることが示されている。

以上を要するに、本論文は、特異値および固有値を計算する代表的なアルゴリズムであるdqds法およびQR法の大域的収束性について理論的に詳細に論じ、精緻かつ明快な結果を与えており、数情報学の重要な分野である数値解析学の発展に大きく寄与するものである。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。