

審査の結果の要旨

論文提出者氏名 西川 功

同期現象は自然現象を理解するための重要概念である。同期現象は、生物系から工学系まで様々な系において現れる。同期現象の例として、心臓の鼓動、蛍の集団明滅、酵母菌の糖代謝、ミレニアムブリッジにおける事故などが挙げられる。これまで多くの研究者たちが数理的に同期現象を研究してきている。

同期現象の研究は、素子数に応じて3つのクラスに分けることができる。系の素子数が2の場合、無限の場合、3以上かつ有限の場合、である。多くの先行研究が、素子数が2の場合と無限の場合を扱ってきた。しかし、素子数が3以上かつ有限の場合は今まで十分に扱われてこなかった。それは前者の2つの方が、数学的な取り扱いが容易なためである。本論文は、素子数が3以上かつ有限の場合、すなわち有限サイズ効果の問題を扱っている。現実では素子数が無限ということはなく、また素子数が2の場合は特別な場合であることを考えると、有限サイズ効果への理解を深めることは意義深い。具体的には例えば次のふたつの点で重要である。(1) 系が有限サイズのとき、物理量は一定ではなく揺らぎを伴うことがある。その揺らぎは、例えば、体内時計の精確さの維持のためには弱い方が好ましく、確率共鳴現象のためにはある程度の強さが必要であろう。そのため、揺らぎの強さの素子数などへのパラメータ依存性を明らかにすることは重要である。(2) 現実の同期現象では、同期する素子の組み合わせが時間とともに移り変わる（スイッチング現象）。また、スイッチング現象は、例えば脳の情報処理を模した数理モデルにおいて生じることも知られている。よって、この現象のメカニズムの理解は、脳の情報処理の機構の理解に通じる可能性があるという点でも重要である。そして、その理解のためには、系の有限サイズ効果を調べる必要がある。

本論文は、「Finite Size Effects on Phase Synchronization」（位相同期現象に対する有限サイズ効果）と題し、5章からなる。

第1章「General Introduction」（序論）では、同期現象を数学的に取り扱うための諸概念を提示し、本研究の背景を述べ、次に素子数が2の場合と無限の場合の研究についてレビューし、それらとの対比として本研究で扱う有限サイズ効果の問題の取り扱いの難しさについて述べている。

第2章「Anomalous fluctuations of an order parameter in globally coupled phase oscillators」（大域結合位相振動子系における秩序変数の異常揺らぎ）では、素子数が大きい有限である系に特有の、系の秩序変数の揺らぎについて調べている。ここでは簡単のため、素子間の結合は大域結合としている。本章の大きな成果は次の3つである。

(1) 関係する先行研究では結合関数は最も扱いやすい $\sin x$ の場合を調べているが、本研究では一般の結合関数を扱っている。

(2) 一般の結合関数の場合でも解析的に取り扱い可能な新しい量 D を導入している。

(3) 通常揺らぎを特徴づける量は、素子数の増加に対して中心極限定理に従って減少していくが、 D の減衰速度は中心極限定理よりも速いことを示している（ただし系が同期を示している時に限る）。対照的に、イジングモデルでは D は素子数の増加に対して中心極限定理に従って減衰する。すなわち、 D という量は大域結合位相振動子系の揺らぎの異常性を特徴づけている。

第3章「The robustness」（そのロバスト性）では、第2章で得られた結果のロバスト性について調べてい

る。特に、(1) 揺らぎの原因が外部ノイズのみである場合（第2章では揺らぎの原因は素子それぞれの固有振動数のばらつきであった）、(2) 結合が局所的な場合、のふたつを比較対象として扱っている。どちらの場合も第2章の結果と異なる結果、すなわち、 D は素子数の増加に対して中心極限定理に従って減衰するという結果が得られる。その原因については議論の節で考察している。

第4章「Switching phenomena & an effect of chaotic amplitudes on it」（スイッチング現象とそれに対するカオス振幅の影響）では、素子数が3以上の系に特有の、スイッチング現象について調べている。スイッチング現象とは、同期する素子の組み合わせが時間とともに移り変わる現象である。ここでは簡単のため、3素子間でのスイッチング現象を扱っている。先行研究では、スイッチング現象に対する素子間の結合関数の高調波成分の影響を調べているが、本研究では、素子の内部の性質がスイッチング現象に与える影響、特にカオス振幅の影響について考察している。従来までの先行研究では、カオス振幅は位相に対する単なるノイズとみなされていたが、本章では、カオス振幅はスイッチング現象に対して決定的な影響をもたらすことがあることを明らかにしている。振幅が位相変数に与える影響は、近年のホットトピックスである。例えば、位相だけのモデルであっても、そのモデルを理論的に導出する前のモデルの振幅変数が、その位相のみのモデルに重要な役割を果たすことが近年示されている。そのような研究の流れの背景としても、本章の成果は重要であると考えられる。

第5章「General Conclusion」（結論）では、以上の結果に対するまとめと議論および今後の課題について述べている。

以上を要するに、本論文は、従来まで取り扱いが困難だった位相同期現象に対する有限サイズ効果の問題を、解析的に取り扱いやすい非自明な量を導入することや、カオス的振幅などの量の影響を調べることで、理論的に詳しく解析し新たな知見を得ている。これは数理情報学および非線形科学に貢献するところが大きい。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。