論文内容の要旨

論文題目　On some algebraic properties of CM-types of CM-fields and their reflexes

（和訳）　CM 体の CM-type と reflex の体のある代数的性質について

氏名　富安　亮子

本論文においては、CM 体 K の reflex の体が持つ代数的構造に関する新しい定理を 3 つ示す。K の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のガロア閉包 K^c のガロア群 $\mathrm{Gal}(K^c/\mathbb{Q})$ の構造から導かれる half norm map の組合せ論的な性質からこれら三つの定理が導かれる。この結果から、志村・谷山によるアーベル多様体の complex multiplication の理論に登場する reflex の体と元の CM 体 K の関係性について、新たな視点を提案することが本論文の目的である。

楕円曲線における CM 理論は志村・谷山により高次元へと拡張された。高次元においては、CM を持つアーベル多様体のモジュライの体および n 分点によって、CM を与える CM 体 K ではなく、reflex の体と呼ばれる別の CM 体のアーベル拡大体が生成される。また、アーベル拡大体のガロア群はイデール群の間の写像として定義される half norm map の kernel によって与えられる。

CM を持つアーベル多様体によるアーベル拡大体ついては、論文 [Shimura, 1962; Ovseevich, 1974] において調べられ、K の最大総実部分体 K_0 の類体と全ての CM-type から生成されるアーベル拡大体の合成体のガロア群に関する記述が与えられた。また、[Kubota, 1965] において一つの CM-type によって生成されるアーベル拡大体のランクが求められた。さらに全ての CM-type によって生成されるアーベル拡大体（K_0 の類体は含まない）のガロア群の記述が [Wei, 1994] において与えられている。まず一番目の定理（Theorem 2.1）において、Wei の定理を一般化し、モジュライの体と任意の自然数 n における n 分点によって生成されるアーベル拡大体の記述を与える。証明の方法としては、上記の half norm map に関する組合せ論的な補題を用いることにより [Wei, 1994] とは異なる証明を与える。

Reflex の体と元の CM 体の関係に関して、[Shimura, 1977] において、ガロア群 $\mathrm{Gal}(K^c/\mathbb{Q})$ が二面体群 D_{2n} に同型のときには、体 K とその reflex の体との間に指標関係式が成立することが指摘された。一般に、指標関係式から Artin L 関数の関係式、さらに相対類数などの代数体の不変量の関係式を得ることができる。二番目の定理（Theorem 3.1）では、一般の CM 体において成立する指標関係式を与え、さらに志村によって得られた指標関係式がこれから導かれることを示す。関係式の左辺と右辺にはそれぞれ、全ての reflex の共役類の代表系、および、元の CM 体 K を含む CM 体 $K(I)$ の集合が現れる。K の $\mathbb{Q}$ 上の次数が 2, 4, 8 に等しいときには、全ての $K(I)$ が K に等しい。

三番目の定理（Theorem 4.1）は、multiplicative quadratic form である Pfister form と reflex の体の関係について述べる。CM 体 K の最大総実部分体を K_0 とし、ある総正な元 $d \in K_0$ が存在して $K = K_0(\sqrt{-d})$ であるとする。さらに、K_0 の実数体 $\mathbb{R}$ への埋め込みを $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ として、Λ を CM-type の代表系とすると、K_0 の $\mathbb{Q}$ 上ガロア閉包 K_0^c 上で定義された Pfister form $q := \langle 1, \varphi_1(d) \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, \varphi_N(d) \rangle$ は、reflex の体の直和 $\oplus_{\Phi \in \Lambda} K^*(\Phi)$ 上で定義される 2 次形式 $Tr_{K^*(\Phi)/\mathbb{Q}}(\bar{a}a)$ の orthogonal sum に同型となる。

一般に CM 体 K のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し、$\mathfrak{a} \mapsto \oplus_{\Phi \in \Lambda} N_\Phi(\mathfrak{a})$ の像は $\oplus_{\Phi \in \Lambda} K^*(\Phi)$ の格子となる。これによって、K の K_0 上の相対イデアル類群から 2^N 次元 2 次形式への写像を作ることができるが、一番目の定理と三番目の定理は、この写像の kernel と image に関する結果を与えている。特に、K が虚 2 次体の場合、この写像によって、K のイデアル類群の積構造は 2 次元 2 次形式の composition による積構造に一致することはよく知られているが、本論文の結果はこのことの高次元への拡張を与えていると考えることができる。