論文審査の結果の要旨

論文題目：On some algebraic properties of CM-types of CM-fields and their reflexes
（和訳）　　CM 体の CM-type と reflex の体のある代数的性質について

氏　名　　富　安　亮　子

第二次世界大戦後、André Weil, 志村五郎、谷山豊によって組織的な研究が始められた、高次元の極大虚数乗法をもつアーベル多様体の理論は、一次元の古典的な場合と異なり、そのアーベル多様体の自己準同型代数であるCM体K（総実な体上の総虚な２次拡大体はCM体という）と、そのアーベル多様体のmodulusのCM体K^*は、一般には異なる体になる。ここで、KからK^*を得るときに、Kの複素数体の埋め込みの「半分」Φを指定して（これはアーベル多様体から決まるCM型と呼ばれる)、それによってhalf-norm map, half-trace mapをKから$K^*(\Phi)$へ、有理数体上の代数群の写像として定めることが基本的な構成で、双対あるいはreflexの体$K^*(\Phi)$も、この写像を与える最小の代数体として特徴づけられる。ここで付言すれば、これが一般のShimura多様体の正準模型を自然に定義する体の構成の原型となっている。

さて、ここで問題となるのは、K と $K^*(\Phi)$の関係であるが、これについては興味深い重要な問題にも関わらず、極めて研究が少なく不十分な状態であるのが現状である。

さて申請者は、Journal of Number Theory に掲載予定の同じ表題の論文で、この問題に関して以下の重要な三つの定理を得ている。通常の手続きで、いま K と $K^*(\Phi)$の役割を交換する。

主定理１：A を K 上定義される極大虚数乗法をもつアーベル多様体で、b をその reflex の体の整イデアルとするとき、A の modulus と b-等分点で生成される体の（類体論で対応する）Galois 群を特徴づける結果である。

主定理２：これは、K とその reflexes (CM 型Φを動かせば、K の次数を 2n とすると、2^n個ある)の Galois 群の指標の間のある関係式から、Artin の L 関数の関係式を導く。

主定理３は、CM 体の相対イデアル類群に、その reflex の体上の Pfister 形式という２次形式を対応させる結果である。

上記の論文の三つの定理のうち、定理１は、既存の結果(論文中で引用されている Wei の結果)をよりシャープにした。技術的な改善であるが、特定のイデアル b を固定して定式化した形で結果が得られる点が優れている。定理２は、これまでの結果(Shimura, Dodson など)を包括的に含む、一般性のある結果である。元の CM 体のいくつかの Artin L 関数と、

reflex の体の Artin L 関数の関係式を示すということは、例えば有理数体上の分岐する素数などにある関係が存在することを意味する。これは個々の実例では確認できるが、その関係の適切な定式化を与えるのは容易ではない。

定理３は、Gauss の古典的な２次体の研究で、イデアル類群と２次形式の Witt 群が自然に同型になる結果を高次の場合に拡張を試みた。まだ、いろいろ関連する問題を解決する必要があるが、新たな方向への出発点であり興味深い。

高次元の極大 CM 型のアーベル多様体は、複素数体上で形式的に存在を示すことは易しいが、その moduli の体を決めた例は、Fermat 曲線の Jacobi 多様体の因子の外は、２・３の強い対称性をもつ曲線の Jacobi 多様体の因子ぐらいしか例が知られていない。申請者はわずかな手がかりから、既存の結果の本質を見抜き、おそらくは、標準的な議論でできる最良の一般化を得ていると思われる。

この論文によって既存の、いわば「中途半端」な過去の結果が、収まるべきところに収まったように思う。今後 CM 体と、その reflex を研究するときには基礎となる良い結果である。

よって、論文提出者　富安亮子は、博士（数理科学）の学位をうけるにふさわしい十分な資格があると認める。