論文の内容の要旨
論文題目: Abundance conjecture and canonical bundle formula
(アバンダンス予想と標準因子公式)

氏名: 権業善範*

1　はじめに

対の特異点などの基本的な用語は Chapter 1 に従って用いるとする．また全て複素数体上で考える．まず, **一般化されたアバンダンス予想**を述べる．

予想 1.1 (一般化されたアバンダンス予想)**.** 対 (X,Δ) を射影的 *lc* 対とする．このとき $\nu(K_X+\Delta)$ と$\kappa(K_X+\Delta)$ は一致する．さらに, もし $K_X+\Delta$ が *nef* ならば, 半豊富である．

特に, $K_X+\Delta$ が nef の場合, 単に**アバンダンス予想**と呼ぶ．数値的小平次元 $\nu(K_X+\Delta)$ は, 第 2 節で定義する．上の予想は極小モデル理論においてとても重要な予想である．実際, 予想 1.1 から極小モデル予想が従う (cf. Theorem 4.3.2).

この要旨では, 第 2 節において, 予想 1.1 の $\nu(K_X+\Delta)=0$ の場合の解決 (Chapter 2) と標準因子公式を用いたアバンダンス予想への応用 (Chapter 4) を述べる．第 3 節では, アバンダンス予想の slc 対への拡張を述べる (Chapter 5)．第 4 節では, 標準因子公式の応用として, 劣随伴公式 (Chapter 3), 対数的 Fano 対, (弱)Fano 多様体の像についての結果 (Chapter 6) を述べる．第 5 節では, 数値的小平次元 0 の slc 対のアバンダンス定理の応用として高々 lc 特異点を持つ弱ファノ多様体の反標準因子の半豊富性の研究結果について述べる (Chapter 7). なお, Chapters 3, 5, 6 は藤野修氏との共同研究であり, Chapter 4 は Brian Lehmann 氏との共同研究である．

2　数値的小平次元 0 の極小モデル理論とその周辺

Chapter 2 では, 次を証明した．

定理 2.1 (Theorem 2.1.2)**.** 対 (X,Δ) を $\mathbb{Q}$-分解的射影 *dlt* 対とする．さらに $\nu(K_X+\Delta)=0$ を仮定する．このとき (X,Δ) は極小モデルを持つ．

ここで, pseudo-effective 因子 D と豊富因子 A に対して,

$$\sigma(D,A)=\max\{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}|\limsup_{m\to\infty} m^{-k}\dim H^0(X,\llcorner mD\lrcorner+A)>0\}$$

と定義する．さらに D の数値的飯高次元 $\nu(D)=\max\{\sigma(D,A)|A:$ 豊富因子 $\}$ と定義する．特に $D=K_X$ のとき, $\nu(K_X)$ を数値的小平次元と呼ぶ．(数値的飯高次元 $\nu(D)$ は [N] で, $\kappa_\sigma(D)$ という記号を用いられている)．定理 2.1 は klt 対の場合, Druel 氏により知られていた (cf. [D]) が, それとは独立に定理 2.1 を示した．さらに,

* gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

Theorem 2.3.2 と合わせると次の川又氏によって証明された lc 対に対する数値的小平次元が 0 のアバンダンス定理 ([K2]) の別証明を得る．

定理 2.2 (Theorem 2.3.3)**.** 対 (X,Δ) を射影 *lc* 対とする．さらに $\nu(K_X+\Delta)=0$ を仮定する．このとき $\kappa(K_X+\Delta)=0$ である．

定理 2.2 は klt の場合, 中山氏によって証明された ([N, V, 4.9 Corollary]). その後この証明とは全く異なる証明を川又氏が見つけ, その結果, lc に拡張することに成功した．今回の証明は川又氏の証明とは異なる証明である．また, 一般ファイバーが数値的小平次元 0 となるファイバー空間に対して次の定理が成り立つ．

定理 2.3 (Theorems 4.1.2, 4.3.2)**.** 対 (X,Δ) を $\mathbb{Q}$-分解的射影 *klt* 対とする．さらに連結ファイバーを持つ射影射 $f:X\to Z$ の一般ファイバー F が $\nu((K_X+\Delta)|_F)=0$ を満たすとする．このとき, ある Z の双有理モデル Z' と Z' 上の *klt* 対をなす境界 Γ が存在して, その対数的標準因子 $K_{Z'}+\Gamma$ が *pseudo-effective* となり, 対 (Z',Γ) が対数的標準因子が半豊富となる極小モデル *(*これを良い極小モデルと呼ぶ *)* を持つならば, (X,Δ) も良い極小モデルを持つ．

このことから予想 1.1 は次の予想に帰着される (Theorem 4.1.5).

予想 2.4. 射影的 *klt* 対 (X,Δ) に対して, その対数的標準因子 $K_X+\Delta$ と任意の動的曲線 C の交点数が正とする．このとき $K_X+\Delta$ は *big* である．

3 半対数的標準対に対するアバンダンス予想

ここで**半対数的標準** *(slc)* **対**を定義する．

定義 3.1. 純 d 次元被約 S_2-スキーム X と, その上の $\mathbb{Q}$-係数有効 *Weil* 因子 Δ について, $\mathbb{Q}$-係数 *Weil* 因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* 因子であるとする．さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する．既約分解を $X=\bigcup X_i$ とする．正規化を $\nu: X' := \coprod X'_i \to X=\bigcup X_i$ とする．ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす．スキーム X 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'}+\Theta := \nu^*(K_X+\Delta)$ を満たす因子として定義する．また $\Theta_i := \Theta|_{X'_i}$ をおく．この対 (X,Δ) が**半対数標準対** (略して, **slc 対**) とは, (X'_i,Θ_i) は *lc* となるときをいう．

定理 3.2 (Theorem 5.1.3)**.** 対 (X,Δ) を射影的 *slc* 対とする．さらに上の対 (X',Δ') に対して, $K_{X'}+\Delta'$ が半豊富であるとする．このとき $K_X+\Delta$ も半豊富である．

この定理の証明では (基本的に)[F] の枠組みを [BCHM] を用いながら遂行していく．その際に必要な鍵となる定理が次である．

定理 3.3 (Theorem 5.1.1)**.** 対 (X,Δ) を射影的 *lc* 対とする．さらに $K_X+\Delta$ が半豊富であるとする．このとき $m(K_X+\Delta)$ が *Cartier* 因子となる自然数 m に対して $\rho_m(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$ は有限群である．

ここで $\rho_m(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$ は次で定められる．まず双有理写像 $\varphi: X \dashrightarrow X$ が B-双有理写像とは共通の対数的特異点解消 $\alpha,\beta: W\to X$ が $\varphi\circ\alpha=\beta$ と $\alpha^*(K_X+\Delta)=\beta^*(K_X+\Delta)$ を満たすように存在する時を言う．さらに,

$$\rho_m: \mathrm{Bir}(X,\Delta) := \{\varphi: X \dashrightarrow X \,|\, \varphi \text{ は } B\text{-双有理写像 } \} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(H^0(X, m(K_X+\Delta)))$$

は引き戻しで定義される自然な群準同型写像である．この定理の主張は中村氏–上野氏, Deligne 氏らによるコ

ンパクト Moishezon 多様体上の多重標準表現の有限性 (cf. [NU]) の対数版となっている．また, 定理 3.2 と Keel–Matsuki–M^{c}Kernan の議論 [KeMaMc] を組み合わせることにより, lc 対に対するアバンダンス予想は klt 対に対する良い極小モデルの存在から従うことがわかる (Theorem 5.4.7).

4　標準因子公式の双有理幾何への応用

以下, $\mathbb{K}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ もしくは実数体 $\mathbb{R}$ とする．まず次の補題が成り立つ．これは generically finite 射に対する標準因子公式である。

補題 4.1 (Lemma 3.1.1)**.** 射 $f : X \to Y$ を正規多様体の間の *generically finite* 射とする．さらに, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Δ が存在し, (X, Δ) が *lc* となるとする．このとき, もし $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{K},f} 0$ ならば, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Γ が存在し (Y, Γ) が *lc* であり, かつ $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{K}} f^*(K_Y + \Gamma)$ をみたす．さらに (X, Δ) が *klt* の場合, Γ を (Y, Γ) も *klt* となるように選べる．

この補題の応用として次の川又劣随伴定理 ([K1]) の一般化を得る．

定理 4.2 (Theorem 3.1.2)**.** 正規多様体 X が射影的もしくはアフィンであるとする．さらに, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Δ が存在し, (X, Δ) が *lc* となるとする．このとき (X, Δ) に関する極小 *lc center* W に対して, ある有効 $\mathbb{K}$-因子 Δ_W が存在し, $(K_X + \Delta)|_W \sim_{\mathbb{K}} K_W + \Delta_W$ をみたし, かつ, (W, Δ_W) が *klt* である．

さらなる応用として, 川又の半正値性定理の応用 (Theorem 6.3.1) と合わせることで, Schwede と Smith による問題 ([SS, Remark 6.5]) の解決を含む次の定理が証明される．

定理 4.3 (Corollary 6.3.8)**.** 射影射 $f : X \to Y$ を正規射影多様体の間の全射とする *(*連結ファイバーでなくともよい*)*. さらに, X 上にある有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ が存在し, (X, Δ) が *klt* かつ $-(K_X + \Delta)$ が豊富であるとする．このとき, ある有効 $\mathbb{Q}$-因子 Γ が存在し (Y, Γ) が *klt* かつ $-(K_Y + \Gamma)$ が豊富である．

定理 4.3 での f が連結ファイバーを持つ場合の証明をさらに発展させることで次を得た．

定理 4.4 (Theorem 6.1.1)**.** 非特異射影多様体の間の全射 $f : X \to Y$ を非特異射であるとする．このとき $-K_X$ が豊富 *(resp. nef* かつ *big)* であるならば, $-K_Y$ も豊富 *(resp. nef* かつ *big)* である．

すなわち, Kollár–宮岡–森による結果 [KoMiMo] と弱 Fano 多様体の非特異射による像の結果の両方に対して, 正標数還元を用いない証明を与えた．

また上の証明には**大域的** F-**正則**多様体の理論を用いた別証もある (Section 6.6).

5　高々 lc 特異点を持つ弱ファノ多様体について

第 2 節と第 3 節の応用として, 次が得られる．

定理 5.1 (Theorem 7.3.1)**.** 対 (X, Δ) を *lc* 対で $-(K_X + \Delta)$ が *nef* かつ巨大とする．このとき, (X, Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば $-(K_X + \Delta)$ は半豊富である．

なお, lc center の次元が 2 以上の場合, 上の定理が成り立たない例が存在する (Example 7.5.2).

参考文献

[A] F. Ambro, The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration, Compositio. Math. 141 (2005), no. 2, 385–403.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon and J. M^{c}Kernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 405-468.

[D] S. Druel, Quelques remarques sur la décomposition de Zariski divisorielle sur les variétés dont la premiére classe de Chern est nulle, to appear in Math. Z.

[F] O. Fujino, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. 102 (2000), no. 3, 513–532.

[K1] Y. Kawamata, Subadjunction of log canonical divisors, II. Amer. J. Math. **120** (1998), no. 5, 893–899.

[K2] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu = 0$, preprint, arXiv:1002.2682.

[KeMaMc] S. Keel, K. Matsuki, and J. M^{c}Kernan, Log abundance theorem for threefolds, Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 99–119.

[KoMiMo] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779.

[NU] I. Nakamura and K. Ueno, An addition formula for Kodaira dimensions of analytic fibre bundles whose fibre are Moišezon manifolds, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 363–371.

[N] N. Nakayama, *Zarisiki decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[SS] K. Schwede, K. E. Smith, Globally F-regular and log Fano varieties, Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 863–894.