論文の内容の要旨

論文題目　Lattice studies of the $\mathcal{N}=2$ Landau-Ginzburg model using a Nicolai map
(ニコライ写像を用いた$\mathcal{N}=2$ ランダウ-ギンツブルグ模型の格子上での研究)

氏　　名　河井 博紀

2次元の共形場理論は様々な理由から興味深い理論である．それは統計系の臨界現象を記述する理論として，また，$\mathcal{N}=2$ 超対称共形場理論は超弦理論において時空の $\mathcal{N}=1$ 対称性から見いだされる世界面上の理論として，その分類及び相関関数の解析が重要な課題となっている．共形場理論の特徴の一つは，その相関関数がある種の微分方程式を通じて解析できるという点である．しかし，ミニマル系列と呼ばれる，有限個のプライマリー場で代数が閉じる種類の共形場理論については，そのラグランジアン記述が存在すると予想されている．これは Landau-Ginzburg 記述と呼ばれている．例えば，$\mathcal{N}$=2 Wess-Zumino 模型 (WZ 模型) もしくは Landau-Ginzburg 模型と呼ばれる模型では，quasi-homogeneous 型の超ポテンシャル $W(\Phi)=\lambda\Phi^n$, $n=2,3,4,\cdots$ の場合，その赤外固定点は $\mathcal{N}$=2 超対称共形場理論のミニマル系列を記述すると予想されている．本研究では，格子シミュレーションにより $\mathcal{N}=2$ WZ 模型のラグランジアンからその相関関数を直接評価し，この予想を非摂動的にチェックした．これは同時に，数値的手法による共形場理論の解析という新しい可能性を提案する．

第二章では $\mathcal{N}$=2 WZ 模型の定義，その対称性について解説する．本研究において興味がある quasi-homogineous 型の超ポテンシャルの場合，この模型にはカイラル対称性が備わっている．この対称性は，理論を格子化する際，その universality class を保つために重要な役割を果たす．また，この模型に存在する Nicolai 写像と呼ばれる特殊な変換についても解説する．これはボソン場を Gaussian ノイズに変換し，同時にのそのヤコビアンがちょうどフェルミオン行列をキャンセルするような変換である．本研究では，この Nicolai 写像を用いた有効的なシミュレーション方法を提案・利用する．

第三章では Landau-Ginzburg 記述について解説する．ボソニックな共形場理論を例として挙げながら，ミニマル模型を導出する．ミニマル模型は，その演算子積展開と場の運動方程

式の比較を通じて、ラグランジアンにより記述されると予想されている．$\mathcal{N}=2$ 超対称共形場理論の場合には，非繰り込み定理を利用し，それが $\mathcal{N}=2$ WZ 模型により記述されると考えられる事を示す．

第四章では $\mathcal{N}=2$ WZ 理論の格子化に際して問題となる点について解説する．それはダブリング問題と Leibnitz 則の破れである．ダブリング問題とは，カイラル対称性を持つ理論を単純に格子化してしまうと連続理論にはなかったような零質量粒子が現れるという問題である．この超対称模型では超対称性の破れは起きず，ボソンとフェルミオンの状態は対をなすはずであるが，この余分な粒子はそのバランスを崩してしまう．これは overlap フェルミオンと呼ばれる格子フェルミオンを用いる事で適切に対処できる事を解説する．格子化に伴う Leibnitz 則の破れは，超対称な格子作用の構成を困難にする．もし古典的な格子作用が超対称性をもたないならば，我々は手で counterterm を加えてそれらの係数を微調整し，適切な universality class へと調整しなければいけないが，微調整の数は一般に多くあり，現実的ではない．これに対する有効な対処法としては，nilpotent な超対称性を利用する格子化の方法が提案されている．

第五章では，これらの手法を利用した，$\mathcal{N}=2$ WZ 模型の universality class を微調整なしに捉える事のできる格子作用の構成について解説する．この格子模型では，Nicolai 写像を利用して $\mathcal{N}=(2,2)$ の 1 個の SUSY を，overlap 演算子 D を用いて離散的 chiral 対称性を，それぞれ保っており，摂動論の範囲では微調整が不要である事がわかっている．そのため，連続理論と同じ universality class に属していると考えられる．但し，fermion 行列式は実ではあるが正負いずれの値もとりうるため，sign 問題に直面する．

第六章では sign 問題を避けたミュレーション方法を提案し，いくつかの結果について述べる．我々は Nicolai 写像を利用し，経路積分をノイズ積分

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle \sum_{i=1}^{N(\eta)} \mathcal{O}(\eta,\phi_i)\,\mathrm{sgn}|D+F(\phi_i)|\rangle_\eta}{\langle \sum_{i=1}^{N(\eta)} \mathrm{sgn}|D+F(\phi_i)|\rangle_\eta}, \tag{1}$$

に帰着させてシュミレーションを行った．ここで $D+F$ は fermion kernel，$\{\phi_i|i=1,\cdots,N(\eta)\}$ はノイズ η に写像される boson 場 ϕ の配位，$\langle\cdots\rangle_\eta$ は Gaussian ノイズにわたる平均を意味する．標準正規分布でノイズを生成し，Nicolai 写像を Newton 法で解いて場をサンプリングし，Eq.(1) の分母・分子をそれぞれ評価するという手順である．Eq.(1) の分母は連続極限で Witten 指数 Δ になる事が示され，従って 0/0 を評価するというような問題に直面する心配もない．また，この方法では自己相関は完全に消えている事になる．但し，ノイズごとに全ての解が得られているか不明な点が問題として残っている．この点については，得られたサンプルから，格子理論の超対称 Ward-高橋恒等式を通じて，系統誤差を評価した．

我々は超ポテンシャルが W=$\lambda\Phi^3/3$ の場合に $a\lambda=0.3$ と置き，$\chi_\phi \equiv a^2\sum_{|x|\geq 3a}\langle\phi(x)\phi^*(0)\rangle$ の有限体積スケーリングを通じてウェイトを測定した．予想通り ϕ がウェイト $(h,\bar{h})=(1/6,1/6)$ でスケールすれば，連続極限での体積 V 依存性は $\chi_\phi \propto V^{1-h-\bar{h}}=V^{0.666\ldots}$ となる．我々が得た $1-h-\bar{h}$ の測定値は 0.660 ± 0.011 であり，これは予想と consistent である．系統誤差は 0.5%以下と小さく，分母も今の場合の Witten 指数 $\Delta=2$ にほぼ留まった．また Gaussian 模型との対応を仮定すれば，予想されている結合定数と consistent な結果が得られた．さらに，カレント相関関数を利用した，central charge のより直接的な測定の試みについても触れる．

この結果は，数値的手法による共形場理論の解析という可能性を提案する．しかし，我々のシミュレーションは計算コストの問題から小さな格子サイズに制限されており，アルゴリズムの改良が今後の課題となる．また，近年注目を浴びている Graphics Processing Unit (GPU) を利用すれば大きな高速化を見込む事ができる．それは共形場理論の強力な解析方法を与えると思われる．