本論文は「トポロジカル絶縁体と端状態の理論的研究」("Theory of topological insulator and edge state") と題し、6 章から構成されている。第1章は序論であり、研究の背景および本論文の主目的が述べられている。トポロジカル絶縁体およびトポロジカル超伝導体についての説明を行うとともに、トポロジカル絶縁体に帰着できる量子スピン系の代表例であるキタエフ模型とその解法が紹介されている。また、系の次元性と時間反転・粒子正孔変換・カイラル変換の3つの対称性の有無によって許される既知のトポロジカル相の分類が説明され、未だ見つけられていない時間反転対称性を保ちつつ非自明なトポロジカル相を持つ2次元量子スピン系を構成する意義が述べられている。

第2章から第5章が本論文の主要部分である。まず、第2章ではキタエフ模型で破れていた時間反転対称性を回復する拡張が行われている。具体的には各サイトが4状態をとり、4種類の最近接相互作用および次近接相互作用をもつディラック行列模型が導入され、引き続きマヨラナフェルミオンへのマッピングを用いることによりこの模型の厳密解が構成されている。この解法においてはキタエフ模型の場合と同様に、 $Z_2$ ゲージ場のリンク変数がすべて保存量となっている性質が用いられて解が構成されている。

第3章においてはこの模型の基底状態が相互作用の値によっては非自明なトポロジカル相を持つことが、3種類のアプローチにより示されている。第1のアプローチでは、端のある格子系で数値計算を行われ、時間反転対称性に守られたトポロジカル超伝導体特有の端状態バンドが出現することが示された。第2のアプローチではトポロジカル不変量の直接計算が行われたが、具体的にはマップされたフェルミオンの1粒子固有状態であるブロッホ関数を用いて Kane と Mele によって提唱された  $Z_2$  不変量が計算され、非自明な値を持つ領域が示された。第3のアプローチでは、マップされたフェルミオンの端状態が各波数において1次元波動関数として解析され、そのトポロジカルな性質である巻き付き数が計算された。その結果からトポロジカル相において出現する、ブリルアン域の一部にのみ存在する平坦バンドの出現条件が求められた。これらのアプローチにより、非自明なトポロジカル相が実現するための相互作用についての条件が決定された。

第4章においてはトポロジカル相におけるディラック行列模型のスピン相関関数が議論され、更に端に沿うスピン相関関数が計算されている。まず、基底状態の自発磁化およびほとんどのスピン相関関数が0となることが示され、基底状態がスピン液体となっていることが確かめられた。一方、トポロジカル相において線形分散をもつ端状態が寄与する端に沿うスピン相関関数が計算され、冪的な距離依存性をもつことが示された。

第5章においては、ディラック行列模型からマップされたトポロジカル超伝導体における興味深い状態として  $Z_2$ ゲージ場が局所励起を持つ場合が考察された。各局所励起のまわりにマヨラナフェルミオンが束縛されるが、その際に時間反転対称性を保つようにクラマース対を構成していることが、有限系の数値計算によるエネルギースペクトルの解析により示された。最後の第6章ではまとめと今後の展望が行われている。

本論文では、 $Z_2$ トポロジカル相を実現する 2次元量子スピン模型を初めて構成することに成功し、この模型のトポロジカル相の出現条件を求めたが、このことはトポロジカル相の今後のさらなる理論的解明への寄与が期待されるオリジナルな成果であり、博士(理学)の学位を授与できるものと認める。

なお、第2章から第5章の研究は、笠真生氏および古崎昭氏との共同研究であるが、論文提出者が主体となって分析および検証を行ったもので、論文提出者の寄与が十分であると判断する。