論文の内容の要旨

論文題目　三項法と双対推定による構造物の釣り合い形状の探索

氏名　三木　優彰

本論文は、構造物の釣り合い形状を計算機を用いて探索する標準的な手順についてまとめたものである。特に、標準的かつ強力な束縛条件つき最小化アプローチとして、三項法と双対推定の組み合わせたアルゴリズムの利用を提案することが、本論文の主たる目的である。

関数の直接最小化アプローチは、仮想仕事の原理を介して静力学と密接に関連している場合がある。一方で、構造物の釣り合いの問題は、有限個の独立パラメータをもつ目的関数の停留問題で与えられることが多く、そのような停留問題は、関数の直接最小化アプローチにより解くのが自然である。

関数の直接最小化アプローチを用いると、計算を中断することなく様々にパラメータを変更し、釣り合い形状を次々に探索してゆくことができる。従って、関数の直接最小化アプローチを用いたインタラクティブな構造デザインツールの構築が期待できる。三項法とはそのような関数の直接最小化アプローチの一つであり、二項法の大域的な収束効率の改善を目的として導入される。二項法とは基本的には最急降下法であり、三項法は基本的に動的緩和法を大幅に簡略化、標準化したものである。

構造物は、外部の系と剛に結合し反力を得て釣り合っているのが普通である。例えば、トラスやバネからなる系は通常、地面や壁などに幾つかの端点を固定されそこから反力を得ている。このような背景から停留問題は、いくつかの付帯条件と連立されて与えられるのが普通である。付帯条件を含まない場合も実際は付帯条件が予め直接代入され、独立パラメータが削減されたものであることが多い。一般にはそのような付帯条件の直接代入と独立パラメータの削減は実行が不可能であることが多く、そのような場合の標準的な手続きとして *Lagrange* 未定乗数法が知られている。*Lagrange* 未定乗数法を用いると、付帯条件つき停留問題は独立パラメータと *Lagrange* 未定乗数の双方を未知数とする単独の関数の停留問題に帰着する。ところが、このようにして得られた停留問題の停留条件は、普通な意味での停留問題の停留条件と、与えられた付帯条件が独立に連立されたものとなるから、束縛条件つき最小化アプローチにより解くのが自然である。

束縛条件付き最小化アプローチにおいては２つの問題を解決する必要があり本論文の議論の中心となる。１つ目は *Lagrange* 未定乗数の扱いであり、２つ目は付帯条件を満たす値域に独立パラメータを束縛するための戦略である。特に、停留条件に *Lagrange* 未定乗数が

含まれることが、関数の直接最小化アプローチを実行する上での大きな大きな障害となる。双対推定とは、*Lagrange* 未定乗数を最小ニ乗解を用いて陽に決定してしまうことで、関数の直接最小化アプローチを実行可能とする戦略である。これは数理計画問題の解法の一種、アフィンスケーリング法において用いられているものである。アフィンスケーリング法とはリーマン多様体上の射影勾配法であり、射影勾配法とは、*Lagrange* 未定乗数を双対推定により決定した最急降下法である。ただし、双対推定それ自体は *Lagrange* 未定乗数を勝手に決めてしまうという極めて単純なアイデアに基づいており、一般の関数の直接最小化アプローチに組み込み可能である。特に三項法とも組み合わせることができ、これが本論文で双対推定を導入した理由である。

双対推定を用いると、ベクトル空間が互いに直交する２つの空間に自然に分解される。この分解により、束縛条件つき最小化アプローチにおいて、直接最小化アプローチと束縛条件の満足が明確に分離される。そして、それぞれのベクトル空間上でそれぞれに対する戦略が独立に選択可能となる。

本論文の第２章では、構造物の釣り合いの問題の計算機による解法を、問題の表現と解法に明確に分離するため、仮想仕事の原理を中心にいくつかの一般表現を吟味した。仮想仕事の原理を用いると力学的な考察が可能となり、また仮想仕事の原理から導かれる停留条件は、関数の直接最小化アプローチを実行可能とする。そのようにして得られる停留条件は、単純な関数の勾配ベクトルを用いて記述される。第１章の後半では、要素の長さや面積、体積といった単純な関数の勾配ベクトルの一般形を導き、目的関数の見つからないような一般の停留条件を定式化した。これは関数の直接最小化アプローチの応用範囲が目的関数の見つからない一般化された停留問題にまで拡張されたことを意味する。そのような一般の停留条件とは、非線形有限要素法において典型的に解かれる非線形連立方程式に他ならない。そのような非線形連立方程式は一般に、連続体の仮想仕事の原理を *Galerkin* 法により離散化して得られるものである。

第３章では、標準的な関数の直接最小化アプローチとして二項法と三項法の提案を行った。また、標準的な束縛条件つき最小化アプローチとして、最小化アプローチと束縛条件の満足の単純な交互の実行を提案した。これは最小化アプローチと束縛条件の満足の明確な分離により可能となるもので、そのような分離は双対推定の導入により可能となる。

第４章では、第２章と第３章の定式化に基づく数値解析例を紹介した。特に、目的関数に付加されたパラメータや束縛を受ける関数の束縛値を不連続的に変更し、次々と釣り合い形状を探索してゆけることを示した。その結果、関数の最小化アプローチや関数の束縛条件付き最小化アプローチを用いてインタラクティブな構造デザインツールを構築可能であると主張した。またさらに、第２章の後半で導いた目的関数の見つからない一般化された停留問題を、三項法を用いて解ける例題にも言及した。

第４章で紹介したほとんどの問題は二項法と三項法のいずれを用いて解ける。しかし、三項法の方が扱い易さの点ではるかに優れている。従って本論文の著者は、インタラクテ

ィブな構造物の釣り合い形状の探索ツールの構築という目的において、三項法と双対推定の組み合わせの利用を強く推奨するものである。

本論文の結論は次の通りである。

- 構造物の釣り合いの問題を解く数値解法において、停留問題や仮想仕事の原理といった一般表現を用いた記述が、それぞれの解法の特徴や差異を明確にすると共に、関数の直接最小化アプローチに代表される一般の非線形数値解法の選択を可能にする。
- 関数の直接最小化アプローチは仮想仕事の原理を介して静力学と密接に関連している場合がある。従って構造物の釣り合いの問題は、関数の直接最小化アプローチにより解くのが自然である。
- 釣り合いの問題が付帯条件と連立されて与えられた時、*Lagrange* 未定乗数法を用いると一本の停留問題で表現できる。このとき束縛条件付き最小化アプローチにより解くのが自然である。双対推定は、束縛条件付き最小化アプローチにおいて、*Lagrange* 未定乗数を最小二乗解により陽に決めてしまうことで関数の直接最小化アプローチを実行可能とするもので、簡便かつ強力な技法である。
- 三項法と双対推定の組み合わせを用いた束縛条件つき最小化アプローチが、構造物の釣り合い形状のインタラクティブな探索ツールの構築に有益である。
- 関数の直接最小化アプローチは、最小化を受ける目的関数の見つからないような一般化された停留問題も解ける場合がある。そのような一般の問題とは、非線形有限要素法で典型的に解かれる、*Galerkin* 法による離散化で得られた非線形連立方程式に他ならない。

以上より、三項法と双対推定を組み合わせた束縛条件つき最小化アプローチが、構造物の釣り合い形状の探索における簡便かつ強力で応用範囲の広い数値解法として選択可能であることが示された。